

LABORATION 2

Trapetsregeln, ekvationer, ekvationssystem, MATLAB-funktioner

Genomför denna laboration genom att göra de handräkningar och MATLAB-program som begärs. Var noga med att skriva upp resultaten och svaren på frågorna. Studera avsnitten 6.4,6.5,6.6,6.9,6.10 och 5.2.1 i NAM parallellt. Se även till att göra snygga grafer, där sådana efterfrågas. Bonuspoäng ges i samband med kontrollskrivning den 4/10. Om denna inte är godkänd eller om man uteblir, måste Lab2 redovisas muntligt enligt särskilt schema, men då ges ingen bonus

1. Numerisk integrering - noggrannhetsordning

Följande integral ska beräknas

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{x+2} dx$$

A. Gör först följande laborationsförberedande uppgifter a)-c):

- Rita först en graf över integranden, dvs $y = \sqrt{x+2}$. Uppskatta den sökta integralens värde ur grafen. Svar: $I \approx$
- Beräkna integralens värde analytiskt, dvs exakt. Svar: $I =$

I nedanstående tabell har ett antal trapetsvärden som approximerar I redan beräknats:

h	$T(h)$	$E_T = T(h) - I$	$\Delta T(h)$	$T_{extr}(h)$	$E_{T_{extr}} = T_{extr}(h) - I$
1	x	x	—	—	—
0.5	x	x	x	x	x
0.25	2.796336	x	x	x	x
0.125	2.797160	x	x	x	x
0.0625	2.797366	x	x	y	x

- Räkna ut och fyll i för hand de värden som ska stå i x -positionerna samt i y -positionen. Antag att y -värdet tas som approximation till I . Uppskatta *trunkeringsfelet* i detta värde utifrån vad som sagts på föreläsningen eller vad som står i NAM, sid 60 (Experimentell felskattning).

Använd värdena $\sqrt{1.5} = 1.224745$, $\sqrt{2} = 1.414214$, $\sqrt{2.5} = 1.581139$, $\sqrt{3} = 1.732051$

B. Skriv sedan ett MATLABprogram som beräknar integralen numeriskt med trapetsregeln (se NAM 5.2). Undersök hur trunkeringsfelet, E_T , beror av steglängden, h , genom att plotta felen som funktion av steglängderna $h = 1/8, 1/16, 1/32, 1/64$. Använd MATLABs kommando `loglog` för ploten. Visa hur vi uppskattar metodens noggrannhetsordning, p , med hjälp av denna plot. Vad blir p ?

Utöka sedan programmet så att integralen beräknas med trapetsregeln och en extrapolation. Plotta i samma diagram som ovan felet $E_{T_{extr}}$ som funktion av h . Vad blir noggrannhetsordningen p nu?

För trapetsregelns noggrannhetsordning gäller

$$|e_T| = |I - T(h)| \approx Ch^p$$

där C är en konstant, p är noggrannhetsordningen, $T(h)$ är det numeriskt uträknade integralvärdet (med trapetsregeln eller trapetsregeln och en extrapolation) och I är det exakta värdet.

2. Olinjär skalär ekvation

Man vill bestämma samtliga rötter till följande ekvation

$$7x - 20 \cos(3x) - 5 = 0$$

- Rita grafen för funktionen $y(x) = 7x - 20 \cos(3x) - 5$ med MATLAB. Samtliga nollställena till $y(x)$ skall vara med. Pröva med olika intervalllängder. Hur många rötter finns det?
- Genomför, med papper, penna och miniräknare två iterationer med Newton-Raphsons metod och startvärdet $x_0 = 1.5$.
- Visa att ekvationen kan skrivas om till fixpunktsiterationen $x_{n+1} = \frac{47}{40}x_n - \frac{1}{2} \cos(3x_n) - \frac{1}{8}$. Genomför med papper, penna och miniräknare, två iterationer med startvärdet $x_0 = 1.5$.
- För bägge metoderna, skriv MATLAB-program som skriver ut tabeller som visar hur iteraten konvergerar mot den rot för vilken startvärdet $x_0 = 1.5$ använts. Utöka tabellerna så att följande storheter kan avläsas: 1) Antal iterationer som krävs för att få tio siffrors noggrannhet med de två metoderna, 2) Konvergenshastigheten (linjär eller kvadratisk).

3. Löparbana med sekantmetoden

En ellipsformad 400-meters löparbana ska anläggas på en plan som är 160 meter lång. Hur bred plan krävs? Lös med sekantmetoden och använd Ramanujans formel för omkretsen.

Den indiske självlärd matematikern Srinivasa Ramanujan (1887–1920) föreslog följande approximativa formel för ellipsens omkrets:

$$O_{Ramanujan} = \pi(a+b) \left(1 + \frac{3c}{10 + \sqrt{4-3c}} \right) \quad \text{där } c = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

samt att a och b är ellipsens halvvaxlar

4. Programmering av funktioner i MATLAB

Börja med att skapa en funktion för $f(x) = e^x - x^3$, kalla den `funk1`. Skapa sedan flera (minst 2) funktioner med namn och utseenden som du väljer själv. De ska alla vara funktioner av en variabel och ligga på separata filer med lämpliga namn.

Du ska nu skriva ett program som kan tabellera, plotta, integrera och bestämma nollställen till funktioner. Programmet ska först fråga efter namnet på funktionen. (Programmet får inte i förväg veta funktionernas namn, använd därför MATLAB-funktionen `feval`. Programmet ska också fungera för MATLABs inbyggda funktioner, som t ex `sin` och `log`). Titta i PEng kap 5.6 "Function functions" eller gör `help feval` i MATLAB. Sedan ska programmet upprepat för denna funktion erbjuda tabellering, uppritning, integration och/eller nollställeberäkning med hjälp av en meny. Man ska sedan kunna byta funktion och fortsätta med den nya funktionen eller avsluta.

Dialogen kan se ut enligt exemplet nedan.

Vad heter funktionen? `funk1`

Meny:

1. Tabellera
2. Rita graf
3. Integrera
4. Beräkna nollställe
5. Byta funktion
6. Avsluta programmet

Ditt val: 1

Tabellering:

Ange undre gränsen: 1

Ange övre gränsen: 3

Ange steget: 0.5

x f(x)

1.0000 1.7183

1.5000 1.1067

2.0000 -0.6109

2.5000 -3.4425

3.0000 -6.9145

Meny:

1. Tabellera
2. Rita graf
3. Integrera
4. Beräkna nollställe
5. Byta funktion
6. Avsluta programmet

Ditt val: 4

Beräkna nollställe: Ange ett startvärde: 2

Ett nollställe är

`x = 1.8572`

Meny:

1. Tabellera
2. Rita graf
3. Integrera
4. Beräkna nollställe

```

5. Byta funktion
6. Avsluta programmet
Ditt val: 5

Välja ny funktion:
Vad heter den nya funktionen? sin

Meny:
1. Tabellera
2. Rita graf
3. Integrera
4. Beräkna nollställe
5. Byta funktion
6. Avsluta programmet
Ditt val: 4

Beräkna nollställe: Ange ett startvärde: 6.3

Ett nollställe är

x = 6.2832

Meny:
1. Tabellera
2. Rita graf
3. Integrera
4. Beräkna nollställe
5. Byta funktion
6. Avsluta programmet
Ditt val: 6

Tack och hej!

```

5. Skärning mellan ellipser, ickelinjärt ekvationssystem

Beräkna alla skärningspunkter mellan den sneda ellipsen som definieras av $0.4x^2 + y^2 - xy = 10$ och den ellips med centrum i $(4, 2)$ och halvaxlarna $a = 4$ och $b = 6$ (parallella med koordinataxlarna) som beskrivs av

$$(x - 4)^2/a^2 + (y - 2)^2/b^2 = 1.$$

Ellipserna ska ritas¹ och de erhållna skärningspunkterna markeras med en ring. Hur är det med egenskapen kvadratisk konvergens i din algoritm.

6. Bästa cirkelanpassning, ickelinjär modell

Vi vill anpassa en cirkel till punkterna $(1.1, 0.7)$, $(1.5, 1.9)$, $(2.2, 3.1)$, $(3.2, 3.0)$, $(4.5, 2.3)$, $(4.8, 1.0)$, nu med cirkeln skriven på formen $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$. Det leder till ett överbestämt ickelinjärt ekvationssystem. Använd Gauss-Newtons metod för lösningen.

Skriv i varje iteration ut värdet på det uttryck som minimeras i Gauss-Newtons metod. Rita upp de givna punkterna och den bästa cirkeln.

¹Den sneda ellipsen skrivs bäst i polär form inför uppritningen.