Laboration i SF1523: Studera en pendel och konstruera en optimal balk

Avsikten med denna laboration är att:

- snabbt komma igång med träning på matlabprogrammering (uttnyttja gärna alla schemalagda laborationstillfällen),
- öva på numerisk lösning av differentialekvationer med Matlab,
- lösa ett optimeringsproblem med en differentialkekvation som bivillkor,
- repetera och hantera metoden med Lagrangefunktioner för att lösa optimeringsproblem med bivillkor
- studera ett exempel när en differentialekvation används för att bestämma koefficienter i ekvationen, d.v.s. lösa ett inverst problem.

Denna laboration innehåller i del A frågor för träning på programmering och numeriska metoder för differentialekvationer. Del B handlar om optimering, med en numerisk metod som kan generaliseras till många problem, t.ex. används den för att söka optimal form av en vinge eller ett skrov.

Del A 1. En populations antal individer $y(t)$ vid tiden $t > 0$ beskrivs av differentialekvationen

$$y'(t) = ky(t)\big(a - y(t)\big), \quad t > 0$$

med begynnelsevärdet $y(0) = y_0$ där k, a och y_0 är givna positiva konstanter. Byt variabler $\tau = tka$ och $z(\tau) = y(t)/a$ och visa att

$$z'(\tau) = z(\tau)\big(1 - z(\tau)\big), \quad \tau > 0.$$

Skriv ett matlabprogram som löser denna differentialekvation med Eulers metod

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta\tau} = f(z_n) \quad n = 0, 1, 2, \ldots N - 1,$$

där z_n är en approximation av $z(n\Delta\tau)$ med tidsteget $\Delta\tau = 1/N$ och $f(z) = z(1 - z)$, för olika val av begynnelsedata $z(0)$. Visa figurer av Eulerapproximation av funktionen $z : [0, T] \to \mathbb{R}$ med lämpligt val av tidsteg $\Delta\tau$ och sluttid T.

2a. En dämpad pendel med vinkelutslaget $x(t)$ vid tiden t uppfyller differentialekvationen

$$x''(t) + \beta x'(t) + \sin x(t) = 0\,, \quad t > 0 \tag{1}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = \pi/2$ och $x'(0) = 0$ där $\beta = 1/10$. Skriv (1) som ett system och approximera ekvationen med matlab, t.ex. med hjälp av `ode45` som beskrivs i kapitel 6.5.2 i Sauers bok. Jämför med approximationen till det linjariserade problemet

$$y''(t) + \beta y'(t) + y(t) = 0\,, \quad t > 0\,.$$

2b. Studera vinkelutslaget $x(t)$ för en dämpad pendel i ett kraftfält

$$\begin{aligned} x''(t) + \beta x'(t) + \sin x(t) &= \alpha \cos(\omega t)\,, \quad t > 0 \\ x(0) = x'(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

där $\alpha = 1/10$. Bestäm en numerisk approximation av funktionen x för några värden ω mellan 1/2 och 2. För vilken frekvens ω blir den asymptotiska amplituden, som erhålls efter lång tid, störst?

2c. Jämför resultaten i uppgift 2b med den linjära modellen

$$\begin{aligned} y''(t) + \beta y'(t) + y(t) &= \alpha \cos(\omega t)\,, \quad t > 0\,, \\ y(0) = y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Är det rimligt att approximera funktionen x, i 2b, med funktionen y i 2c? Motivera ditt svar.

Del B 3. Betrakta utböjningen $u(x)$ av en fritt upplagd balk som löser Bernoulli-Eulers ekvation (se kapitel 5.2 i Zill-Wright)

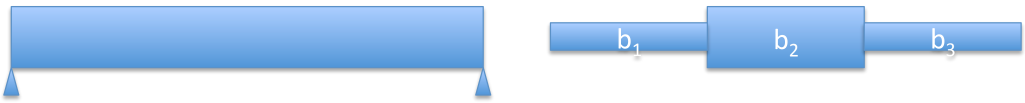
$$\begin{aligned} \big(b(x)u''(x)\big)'' &= f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(1) = b(1)u''(1) &= u(0) = b(0)u''(0) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

med böjstyvheten $b(x)$ och kraften $f(x)$ per längdenhet. Denna ekvation kan skrivas som ett system

$$\begin{aligned} w''(x) &= f(x) \quad x \in (0,1), w(0) = w(1) = 0 \\ b(x)u''(x) &= w(x) \quad x \in (0,1), u(0) = u(1) = 0. \end{aligned}$$

Anta att böjstyvheten b är styckvis konstant

$$b(x) = \begin{cases} b_1 & x < 1/3 \\ b_2 & 1/3 \le x \le 2/3 \\ b_3 & x > 2/3. \end{cases}$$



Fritt upplagd balk med styckvis varierande bredd: från sidan (vänster) och uppifrån (höger).

Målet är att välj parametrarna $b_1 > 0$ och $b_2 > 0$ med $b_3 = 1 - b_2 - b_1 > 0$ så att energin $\int_0^1 f(x)u(x)dx$ minimeras. Vi kan tolka bivillkoret $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ som att vi har en given mängd material att göra vår balk av, med varierande bredd och konstant höjd.

3a. Låt V_n vara en approximation av $v(x_n)$ för $x_n = n\Delta x,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N,\ \Delta x = 1/N$, och approximera andraderivatan med den vanliga andradifferensen $(D^2V)_n := (V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1})/(\Delta x)^2$ för $n = 1, \ldots N - 1$. En approximation av differentialekvationen är differensekvationen

$$(D^2BD^2U)_n = F_n, \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad D^2U_0 = D^2U_N = 0,\ U_0 = U_N = 0 \tag{3}$$

som kan skrivas

$$\begin{aligned} (D^2W)_n &= F_n \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad W_0 = W_N = 0 \\ B_n(D^2U)_n &= W_n \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad U_0 = U_N = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

med

$$B_n = \begin{cases} b_1 & x_n < 1/3 \\ b_2 & 1/3 \leq x_n \leq 2/3 \\ b_3 & x_n > 2/3 \end{cases}$$

och vi kan tolka D^2U som en matris vektor multiplikation, med den tridiagonala matrisen som har $-2/(\Delta x)^2$ i huvuddiagonalen och $1/(\Delta x)^2$ i övre och undre diagonalen,

$$D^2 = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vi ska nu minimera energin $\sum_{n=1}^{N-1} F_n U_n \Delta x =: F \cdot U \Delta x$ under bivillkoret att ekvationen (3) är uppfylld. Det är användbart att studera Lagrangefunktionen $L : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definierad av

$$L(U, \Lambda, b) := \sum_{n=1}^{N-1} \big(U_n F_n + (F - D^2 B D^2 U)_n \Lambda_n\big) \Delta x,$$

Lagrangefunktionen kan också kan skrivas $L(U, \Lambda, b) = \big(F^T U + (F - D^2 B D^2 U)^T \Lambda\big) \Delta x$, där F^T är transponatet av $(N-1) \times 1$ vektorn F. Här är B diagonalmatrisen med B_n i diagonalen,

$$B = \mathrm{diag}(B_n) = \begin{bmatrix} b_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 - b_2 - b_1 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Förklara varför Lagrangefunktionen satisfierar

$$L(U, \Lambda, b) = \big(F^T (U + \Lambda) - (B D^2 U)^T (D^2 \Lambda)\big) \Delta x$$

och ger ekvationerna

$$0 = \partial_{\Lambda_n} L(U, \Lambda, B) = \big((D^2 B D^2 U)_n - F_n\big) \Delta x, \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad D^2 U_0 = D^2 U_N = 0, U_0 = U_N = 0$$
$$0 = \partial_{U_n} L(U, \Lambda, B) = \big((D^2 B D^2 \Lambda)_n - F_n\big) \Delta x, \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad D^2 \Lambda_0 = D^2 \Lambda_N = 0, \Lambda_0 = \Lambda_N = 0$$
$$0 = \partial_{b_i} L(U, \Lambda, B), \quad i = 1, 2.$$

3b. Vi ser att i detta fall är $\Lambda = U$ och för en given böjstyvhet B kan differensekvationen (4) lösas.

Bestäm b_i numeriskt till exempel genom att implementera följande iteration i Matlab:

$$b_i^{m+1} = b_i^m - \delta \partial_{b_i} L(U^m, \Lambda^m, B^m) \quad i = 1, 2,$$

där $\delta > 0$ väljs lämpligt litet (för att iterationerna ska konvergera och $b_i > 0$), prova t.ex. $\delta = 0.5$; $U^m = \Lambda^m$ är lösningen till (4) med $B = B^m$ och b_3 är eliminerad enligt (5). Välj t.ex. en jämt fördelad last $f(x) = 1$. Notera att L ska deriveras med avseende på diagonalelementen i (5). Visa gärna en figur som illustrerar den optimal balkens bredd.

3c. Testa numeriskt noggrannheten av approximationen (3) till (2) (hur?). Beskriv de felkällor din lösning av optimal balk har och jämför felens storlek. Gör experimentell störningsanalys. Är stora konditionstal inblandade? Motivera noggrannheten du ser. Hur kan noggrannheten testas utan att ha tillgång till en exakt lösning?