

Namn:

Personnummer:..... Program och årskurs:

Kontrollskrivning**Numeriska metoder SF1544 och BE3003****15.15 – 17.00 16/12 2016**

Gränsen för betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng).

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).Skriv svaren på dessa papper med **namn och personnummer på varje papper**.**Bonus.** Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT16 här:**1. (2p)** De tre fixpunktiterationsföljderna

$$(1) \quad x_{n+1} = \left(\frac{1}{x_n}\right)^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(3) \quad x_{n+1} = x_n^{1/3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

har alla minst en fixpunkt $x = 1$. Rangordna följderna efter dess asymptotiska konvergensfart, kring fixpunkten $x = 1$, så att den med snabbast konvergens rankas först och den med långsammast konvergens eller ingen konvergens alls rankas sist.

☐ 1, 2, 3☐ 2, 3, 1☐ 1, 3, 2☒ 3, 1, 2.☐ 2, 1, 3☐ 3, 2, 1**2. (2p)** Matlabkoden för Eulers metod

```

N=100;
y=zeros(N+1,1);
y(1)=1;
for n=1:N
    y(n+1)=y(n)-y(n)/N;
end
display(y(N+1))

```

ger en utskrift som är närmast

☒ e^{-1} .☐ $\frac{e^{-1}}{2}$ ☐ 0☐ e^1 ☐ $\frac{e^{-2}}{2}$ ☐ ∞ ☐ e^2 ☐ 1☐ inget, koden fungerar ej.

Namn och personnummer: _____

(1p) När N ökar konvergerar utskriften mot ett värde och felet i utskriften blir ungefär

☐ fördubblat

☐ större med en faktor 4

☒ halverat

☐ oförändrat

☐ mindre med en faktor 1/4

☐ obegränsat

när N fördubblas.

3. (2p) Anta att $A = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 3 \\ 33 & 10^7 \end{bmatrix}$. Låt $x \in \mathbb{R}^2$ lösa det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ och $x + \Delta x$ lösa systemet med en störning i högerledet, $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, där $\|\Delta b\|_\infty / \|b\|_\infty = 10^{-16}$ och $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ med $\|b\|_\infty = \max(|b_1|, |b_2|)$. Det maximala relativa felet, $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$, i lösningen är då närmast

☐ 1

☐ 10^{-4}

☐ 10^{-16}

☐ 10^{-1}

☐ 10^{-5}

☐ 10

☒ 10^{-2}

☐ 10^{-6}

☐ 10^{-3}

☐ 10^{-9}

☐ 10^{-11}

☐ 10^{-8}

4. (2p) Trapetsmetoden med tre lika stora intervall ger integralen $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx$ approximationen

☐ 17/20

☐ 25/20

☐ 19/20

☐ 27/20

☐ 23/20

☐ 29/20

☒ 21/20

☐ något annat

5. (2p) Matlabkoden

```
s=0.0;
N=10000;
for n=1:N
    x=rand(1);
    s=s+x/N;
end
display(s)
```

ger en utskrift som oftast är närmast

Namn och personnummer:

☐ 0.1

☐ 0.4

☐ 0.7

☐ 0.2

☒ 0.5

☐ 0.8

☐ 0.3

☐ 0.6

☐ 0.9

Matlabkommandot **help rand** ger utskriften: "rand Uniformly distributed pseudorandom numbers. R = rand(N) returns an N-by-N matrix containing pseudorandom values drawn from the standard uniform distribution on the open interval (0,1)."

6. (2p) Finita differensmetoden

$$-\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{\Delta x} + n\Delta x u_n = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N$$

med $\Delta x = 1/(N+1)$, där u_n är en approximation av $u(n/(N+1))$, $n = 0, 1, \dots, N+1$, och $u_0 = 0$ och $u_{N+1} = 1$, ger en approximation av randvärdesproblemet

☒ $-u''(x) + 2u'(x) + xu(x) = 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 1$

☐ $-u''(x) + u'(x) + xu(x) = 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 1$

☐ $-u''(x) + u'(x) + u(x) = 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 1$

☐ $-u''(x) + 2u'(x) = 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 1$

☐ $-u''(x) + u'(x) + u(x) = 1, \quad u(0) = 1, u(1) = 0$

☐ något annat

7. (3p) Första steget i Newtons metod med startgissningen $x_0 = 0.5$ och $y_0 = 1.5$ för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 3 &= 0 \\xy - 1 &= 0\end{aligned}$$

leder till

Namn och personnummer:

☐ $\begin{bmatrix} 1.0 & 3.0 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - x_0 \\ x_1 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 1.0 & 3.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.25 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1.0 & 3.0 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -0.5 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1.0 & 3.0 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1.0 & 3.0 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.25 \end{bmatrix}$

☒ $\begin{bmatrix} 1.0 & 3.0 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$

8. (2p) Anta att $A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$ och $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Iterationsmetoden

$$y_k = Ax_{k-1}$$

$$x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|_\infty} \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

där $\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|_\infty := \max(|a|, |b|)$, ger $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ lika med

- | | |
|--|--|
| ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ | ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ |
| ☒ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ |
| ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ | ☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ |
| | ☐ något annat |

9. (2p) Antag att funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ har $f(0) < 0$ och $f(1) > 0$. Två steg med intervallhalveringsmetoden för att bestämma en approximation till en lösning x_* av ekvationen $f(x_*) = 0$ ger ett fel som är ungefär begränsat av

- | | |
|---|---|
| ☐ $ f'(x_*) ^2$ | ☐ 0.01 |
| ☐ $ f'(x_*) $ | ☐ 0.1 |
| ☒ $1/4$ | ☐ $\frac{ f''(x_*) }{2 f'(x_*) }$ |
| | ☐ $\left(\frac{ f''(x_*) }{2 f'(x_*) }\right)^2$ |