

SF1544 LABORATION 2

INTEGRATION, MONTE-CARLO OCH BLACK-SCHOLES EKVATION FÖR OPTIONER

Avsikten med denna laboration är att:

- snabbt komma igång med träning på matlabprogrammering (uttnyttja gärna alla schemalagda laborationstillfällen),
- öva på numerisk lösning av differentialekvationer med Matlab,
- beräkna integraler med två olika metoder: Monte Carlo och kvadratur,
- se förväntade värden av slumpvandring som differensmetoder,
- studera ett exempel på integrationsmetod i hög dimension,
- ge exempel på differentialekvationer med stokastiska data,
- öva på numerisk integration, derivering, differentialekvationer, Monte Carlo metoden, och Matlabprogrammering.

Denna laboration innehåller i del A frågor för träning på programmering och grundläggande numeriska metoder. Del B handlar om deterministiska och stokastiska integrationsmetoder tillämpat på finansiella kontrakt i form av optioner. Frågorna nedan, som inte alltid precis formulerade, ska ses som en vägledning för att skriva en laborationsrapport.

Del A 1. En populations antal individer $y(t)$ vid tiden $t > 0$ beskrivs av differentialekvationen

$$y'(t) = ky(t)(a - y(t)), \quad t > 0$$

med begynnelsevärdet $y(0) = y_0$ där k, a och y_0 är givna positiva konstanter. Byt variabler $\tau = tka$ och $z(\tau) = y(t)/a$ och visa att

$$z'(\tau) = z(\tau)(1 - z(\tau)), \quad \tau > 0.$$

Skriv ett matlabprogram som löser denna differentialekvation med Eulers metod

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta\tau} = f(z_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

där z_n är en approximation av $z(n\Delta\tau)$ med tidsteget $\Delta\tau = T/N$ och $f(z) = z(1 - z)$, för olika val av begynnelsedata $z(0)$. Visa figurer av Eulerapproximation av funktionen $z : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ med lämpligt val av tidsteg $\Delta\tau$ och sluttid T . Presentera även en figur som illustrerar Eulermetodens noggrannhet med avseende på parametern $\Delta\tau$.

Del A 2. Den implicita Eulermetoden för problemet i uppgift A1 lyder

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t} = f(z_{n+1}) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Skriv ett matlabprogram för implicita Eulermetoden, där $z_0 = 1$, baserat på:

- a) fixpunktiterationer (utan att använda f'),
- b) Newtoniterationer (som är en slags fixpunktiteration).

Betrakta modellen

$$\begin{aligned} z'(t) &= -\lambda z(t), \quad t > 0, \\ z(0) &= 1, \end{aligned}$$

där λ är en positiv konstant. Visa att

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= (1 - \lambda\Delta t)z_n \text{ för explicita Eulermetoden,} \\ z_{n+1} &= z_n/(1 + \lambda\Delta t) \text{ för implicita Eulermetoden,} \\ z((n+1)\Delta t) &= e^{-\lambda\Delta t}z(n\Delta t) \text{ för den exakta lösningen.} \end{aligned}$$

Vi har $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. Vad gäller för explicita och implicita Eulermetoderna när $n \rightarrow \infty$ och Δt är fixerad? Implicita Eulermetoden kräver något mer arbete (både för datorn och programmeraren) per tidssteg än explicita Eulermetoden. Ungefär hur många iterationer per tidssteg krävs? Har den implicita metoden någon fördel jämfört med den explicita?

Del B. Laborationsuppgiften handlar om deterministiska och stokastiska integrationsmetoder tillämpat på optioner. En europeisk säljoption är ett kontrakt som ger möjligheten att sälja en aktie för ett fixt pris K vid en fix tid T i framtiden. Värdet f av optionen är en funktion av nuvarande aktiepris s och nuvarande tid t . Black-Scholes ekvation

$$(0.1) \quad \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} + rs \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} + \frac{\sigma^2 s^2}{2} \frac{\partial^2 f(s, t)}{\partial s^2} = rf(s, t) \quad \text{för } t < T \text{ och } s \in \mathbf{R}$$

$$f(s, T) = \max(K - s, 0)$$

beskriver hur optionsvärdet beror på räntan $r \in [0, \infty)$ och aktiens volatilitet $\sigma \in [0, \infty)$. Merton och Scholes fick 1997 Riksbankens "Nobelpris" för härledningen av denna ekvation från en precis matematisk beskrivning av en självfinansierad riskfri portfölj utan arbitrage; härledningen bygger på den "hedging" som utfärdaren (banken) genomför för att hantera optionen. Kolla gärna vad självfinansierad riskfri portfölj utan arbitrage betyder.

Ett alternativt sätt att bestämma optionspriset (i fallet $r = 0$) är att räkna ut det betingande förväntade värdet $f(s, t) = \mathbb{E}[\max(K - S_T, 0) | S_t = s]$ där S_τ löser den stokastiska differentialekvationen

$$(0.2) \quad dS_\tau = \sigma S_\tau dW_\tau$$

som kan tolkas som gränsvärdet av Eulermetoden

$$\bar{S}((n+1)\Delta\tau) = \bar{S}(n\Delta\tau) + \sigma\bar{S}(n\Delta\tau)\Delta W_n$$

där $(\Delta W_0, \dots, \Delta W_n, \dots)$ är oberoende stokastiska variabler som alla är normalfördelade med väntevärdet noll och variansen Δt . I hög dimension, d.v.s. om $S(t) \in \mathbf{R}^d$ för $d \gg 1$, är det ofta mer beräkningseffektivt att använda Monte Carlo alternativet.

Här följer en kort motivering varför väntevärdet av den stokastiska lösningen $\mathbb{E}[\max(S_T - K, 0) | S_t = s]$ löser den deterministiska Black-Scholes ekvation. Låt oss betrakta slumpvandringssapproximationen

$$(0.3) \quad X_{n+1} - X_n = \alpha \Delta \tilde{W}_n$$

där $(\Delta \tilde{W}_0, \dots, \Delta \tilde{W}_n, \dots)$ är oberoende stokastiska variabler och $\Delta \tilde{W}_n = \pm \sqrt{\Delta\tau}$ med sannolikheten 1/2 och $\alpha > 0$ är en konstant. Då uppfyller väntevärdet $\hat{f}_m^n = \mathbb{E}[g(X_N) | X_n = m\alpha\sqrt{\Delta\tau}]$ differensekvationen

$$\hat{f}_m^n = \frac{\hat{f}_{m+1}^{n+1} + \hat{f}_{m-1}^{n+1}}{2}$$

eftersom X_n kan gå från $m\alpha\sqrt{\Delta\tau}$ till $(m \pm 1)\alpha\sqrt{\Delta\tau}$ med sannolikhet $1/2$ på ett tidssteg. Denna differensekvation kan skrivas

$$\frac{\hat{f}_m^{n+1} - \hat{f}_m^n}{\Delta\tau} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\hat{f}_{m+1}^{n+1} - 2\hat{f}_m^{n+1} + \hat{f}_{m-1}^{n+1}}{(\alpha\sqrt{\Delta\tau})^2} = 0$$

vilket är en finit differensapproximation av

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) &= 0, \quad t < T, \quad x \in \mathbf{R} \\ f(x, T) &= g(x), \quad x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Vi ser att det förväntade värdet av diskreta slumpvandringen uppfyller en differensekvation, som approximerar värmeledningsekvationen.

På liknande sätt approximerar den stokastiska differentialekvationen (0.2) Black-Scholes ekvation (0.1) med $r = 0$, vilket kan generaliseras till $r > 0$.

Del B 1. Låt $r = 0$. Motivera, t.ex. med hjälp av Taylors formel, varför $\tilde{f}(m, n)$ definierad av

$$(0.4) \quad \begin{aligned} \frac{\tilde{f}(m, n) - \tilde{f}(m, n-1)}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 m^2 (\Delta s)^2}{2} \frac{(\tilde{f}(m+1, n) - 2\tilde{f}(m, n) + \tilde{f}(m-1, n))}{(\Delta s)^2} &= 0 \\ \tilde{f}(m, N) &= \max(K - m\Delta s, 0) \end{aligned}$$

approximerar $f(m\Delta s, n\Delta t)$ i Black-Scholes ekvation för heltal m och n där $n \leq N$ och $N\Delta t = T$ med (små) positiva reella tal Δt och Δs .

Del B 2. Skriv ett Matlabprogram som löser Black-Scholes ekvation (0.1) för $r = 0$ med hjälp av en differensmetod, t.ex. (0.4). Du behöver ange begynnelsedata motsvarande

$$f(s, T) = \max(K - s, 0).$$

Du behöver också reducera s till ett ändligt intervall

$$s_1 \leq m\Delta s \leq s_2$$

och bestämma approximativa värden för $f(s_1, t)$ och $f(s_2, t)$ för alla $t \in [0, T]$: motivera varför

$$\begin{aligned} f(0, t) &= K \\ f(\alpha K, t) &= 0 \end{aligned}$$

kan vara lämpligt för ett stort värde på α . Välj $T = 1$, $\sigma = 0.2$ och $K = 1.22$ och bestäm $f(K, 0)$. Tänk på att välja Δt och Δs så att metoden blir stabil. Illustrera gärna lösningen med lämplig figur.

Testa numeriskt noggrannheten av approximationen (0.4) till (0.1) (hur?). Beskriv de felkällor din lösning har och jämför felens storlek. Gör experimentell störningsanalys. Är stora konditionstal inblandade? Motivera noggrannheten du ser. Hur kan noggrannheten testas utan att ha tillgång till en exakt lösning?

Del B 3. Denna uppgift behöver ej göras för att laborationen ska godkännas. Betrakta nu priset på en amerikansk säljoption som är ett kontrakt som ger möjlighet att sälja en aktie för ett fixt pris *fram till* en fix tid T i framtiden. Värdet $F(s, t)$ av optionen är som för en europeisk option en funktion av nuvarande aktiepris s och nuvarande tid t . Låt $G(s) :=$

$\max(K - s, 0)$. Optionspriset kan approximeras av följande differensmetod $F(m\Delta s, n\Delta t) \simeq \tilde{F}(m, n)$ där

$$(0.5) \quad \begin{aligned} & \frac{\tilde{F}(m, n) - \tilde{F}_*(m, n-1)}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 m^2 (\Delta s)^2 (\tilde{F}(m+1, n) - 2\tilde{F}(m, n) + \tilde{F}(m-1, n))}{2(\Delta s)^2} \\ & + rm\Delta s \frac{\tilde{F}(m+1, n) - \tilde{F}(m-1, n)}{2\Delta s} - r\tilde{F}(m, n) = 0 \\ & \tilde{F}(m, n-1) = \max(\tilde{F}_*(m, n-1), G(m\Delta s)), \\ & \tilde{F}(m, N) = G(s). \end{aligned}$$

Jämför priset på amerikansk och europeisk option, med $r = 0.05, T = 1, \sigma = 0.2, K = 1.22$. Vad händer om $r = 0$? För amerikanska optioner finns ingen lösningsformel, inte heller någon enkel Monte Carlo metod, som i fallet med europeiska optioner. Differensmetoden (0.5) är ett exempel på en metod för en icke-linjär partiell differentialekvation med ett hinder, i detta fall att lösningen måste alltid vara minst G .

Del B 4. Integration av en funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ kan göras på olika sätt: med hjälp av kvadratur, t.ex. med trapetsmetoden eller med slumpstal och Monte Carlometoden. Låt $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ vara höjden av en kurva. Arean $\int_0^1 f(x)dx$ kan tolkas som den förväntade höjden $\mathbb{E}[f(X)]$ om positionen X är slumpmässig och likformigt fördelad på $[0, 1]$.

Skriv ett Matlab program som bestämmer arean $\int_0^1 (1+x)^{-1/2} dx$ med hjälp av slumphöjder. Implementera också trapetsmetoden och jämför de båda metoderna med avseende på beräkningsarbete för givet fel.

Del B 5. Bestäm med hjälp av Monte Carlo metoden priset på en köpoption

$$\mathbb{E}[\max(S_T - K, 0) \mid S_0 = s] \simeq \sum_{n=1}^N \frac{\max(S_T[n] - K, 0)}{N}$$

och använd att

$$(0.6) \quad S_T[n] = e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma W_T[n]} s$$

där $(W_T[1], \dots, W_T[N])$ är oberoende och $W_T[n]$ är normalfördelad med väntevärdet noll och variansen T . Välj σ, T och K t.ex. som i uppgift B2 med $s = K$.

Vi kan verifiera (0.6): definiera

$$\frac{\Delta \tilde{S}_n}{\tilde{S}_n} := \frac{\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n}{\tilde{S}_n} = \sigma \Delta \tilde{W}_n,$$

där $\Delta \tilde{W}_n$ är given i (0.3). Taylorutveckling ger

$$\log \tilde{S}_{n+1} - \log \tilde{S}_n = \log \frac{\tilde{S}_{n+1}}{\tilde{S}_n} = \log(1 + \frac{\Delta \tilde{S}_n}{\tilde{S}_n}) = \frac{\Delta \tilde{S}_n}{\tilde{S}_n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \tilde{S}_n}{\tilde{S}_n} \right)^2 + \dots = \sigma \Delta \tilde{W}_n - \frac{\sigma^2}{2} \Delta \tau + \mathcal{O}(\Delta \tau^{3/2})$$

och

$$\log \tilde{S}_N - \log \tilde{S}_0 = \sum_{n=0}^{N-1} (\log \tilde{S}_{n+1} - \log \tilde{S}_n) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sigma \Delta \tilde{W}_n - \frac{\sigma^2}{2} \Delta \tau + \mathcal{O}(\Delta \tau^{3/2}) \right) = \sigma X(N\Delta t) - \frac{\sigma^2}{2} T + \mathcal{O}(\Delta \tau^{1/2})$$

där $X(N\Delta \tau)$ är slumpvandringssprocessen (0.3) med $\alpha = 1$, som har väntevärdet noll och variansen T . I gränsen när $\Delta \tau$ går mot noll blir $X(T)$ normalfördelad enligt centrala gränsvärdessatsen.

Del B 6. Bestäm med hjälp av Monte Carlo metoden priset på en regnbågs-köp-på-max-option

$$\mathbb{E} \left[\max \left(\max (S_1(T), S_2(T)) - K, 0 \right), \mid S_1(0) = s_1, S_2(0) = s_2 \right]$$

och använd att

$$S_i(T) = e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma W_i(T)} s_i$$

där $W_1(T)$ och $W_2(T)$ är oberoende och båda är normalfördelad med väntevärdet noll och variansen T . Generalisera exemplet från dimension två till högre dimension och undersök hur beräkningsfelet växer med dimensionen.