

Tentamen del 2

Numeriska metoder SF1544 och BE3003

9.00-12.00 12/1 2017

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas bara om Del 1 eller kontrollskrivningen är godkänd.

Betygsgränser inklusive bonuspoäng: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng.

Det finns två alternativa uppgifter 1; bara en av dem får lämnas in.

1. En dämpad pendel med vinkelutslag $\theta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uppfyller differentialekvationen

$$\begin{aligned}\theta''(t) + \sin \theta(t) + c\theta'(t) &= 0, \quad t > 0 \\ \theta(0) &= \theta_0, \\ \theta'(0) &= 0,\end{aligned}$$

där $\theta_0 \in [0, \pi]$ är en given begynnelseposition och $c = 0.2$ är en friktionsparameter.

1a. (5p) Formulera en numerisk metod för att approximera funktionen $\theta : [0, 30] \rightarrow \mathbb{R}$.

1b. (10p) Skriv ett matlabprogram som visar en fas-plan figur, d.v.s. en graf som visar farten θ' som funktion av läget θ för många banor med olika begynnelsepositioner θ_0 , enligt Figur 1.

1. Matlabkommandot `help hold` ger utskriften: `hold` Hold current graph, hold ON holds the current plot and all axis properties, including the current color and linestyle, so that subsequent graphing commands add to the existing graph without resetting the color and linestyle.

1a. Låt $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{bmatrix}$. Då har vi

$$X'(t) = \begin{bmatrix} \theta'(t) \\ \theta''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -cx_2(t) - \sin x_1(t) \end{bmatrix} =: F(X(t)).$$

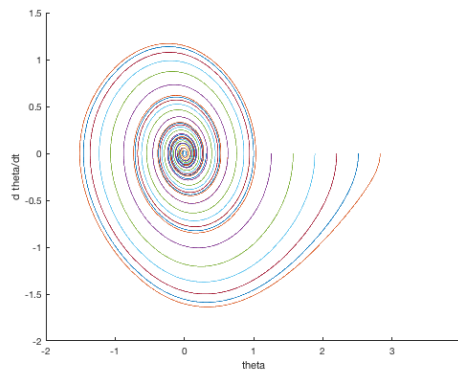
Indelningen $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots$ och approximationen $X_n \simeq X(t_n)$ ger Eulers metod

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t F(X_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

där $X_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1b. Ett exempel på Matlabkod är

```
c=0.2;  
N=10000;
```



FIGUR 1. Fas-plans graf för den dämpade pendeln.

```
dt=30/N;
M=10;
x=zeros(2,N);
xlabel('theta')
ylabel('d theta/dt')
hold on
for m=1:M
    x(:,1)=[pi*m/M;0];
    for n=1:N
        x(:,n+1)=x(:,n)+dt*[x(2,n);-c*x(2,n)-sin(x(1,n))];
    end
    plot(x(1,:),x(2,:));
end
```

Alternativ uppgift 1. (15p) Formulera och bevisa en sats om stabilitet av en explicit differensmetod för värmeledningsekvationen.

2. Antag att funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är definierad av

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1/2, \\ 2x - x^2, & x > 1/2 \end{cases}$$

och betrakta fixpunktiterationerna $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Liknande fixpunktiterationer används i kvantfysik för att bestämma energinivåer och då är x så kallade täthetsmatriser.

2a. (5p) Bestäm alla fixpunkter till funktionen g och avgör vilka fixpunkter som är stabila, d.v.s. avgör om x_n konvergerar mot en fixpunkt när startvärdet x_0 är tillräckligt nära fixpunkten eller om x_n divergerar från fixpunkten.

2b. (5p) Skriv ett Matlab program som för ett antal startgissningar, $x_0 = n/N$, $n = 0, 1, \dots, N$ beräknar resultatet, x_{10} , efter 10 iterationer och plottar detta som en funktion av x_0 . Här är N något lämpligt stort heltal.

2c. (10p) Visa att fixpunktiterationerna

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

konvergerar för alla startgissningar x_0 , sådana att $0 \leq x_0 \leq 1$, och ange för varje x_0 vilken fixpunkt iterationerna konvergerar mot.

2a. Ekvationen $x = g(x)$ ger för $x \leq 1/2$ att $x = x^2$ som har lösningen $x = 0$ och för $x > 1/2$ får vi $x = 2x - x^2$ som har lösningen $x = 1$. En fixpunkt x är stabil om $|g'(x)| < 1$. Vi har $g'(0) = 0$ så $x = 0$ är stabil och $g'(1) = 2 - 2 = 0$ ger att även $x = 1$ är stabil. Svar: $x = 0$ och $x = 1$ är alla fixpunkter och båda är stabila.

2b. Ett exempel på matlabkod är

```
N=50; %antal startvärden
K=10; %antal fixpunktiterationer
x0=zeros(N,1); %startvärden
x10=zeros(N,1); %slutvärden
```

```
for n=1:N
    x=n/N;
    x0(n)=x;
    for k=1:K
        if(x<=0.5)
            x=x*x;
        else
            x=2*x-x*x;
        end
    end
end
```

```

        end
    end
    x10(n)=x;
end
plot(x0,x10,'*')
```

2c. Vi kan dela upp $[0, 1]$ i två intervall $[0, 1] = [0, 1/2] \cup (1/2, 1]$.

Om $x_0 \in [0, 1/2]$ har vi $0 \leq x_1 = x_0^2 < 1/4$ och $0 \leq x_n \leq x_1$, $n = 1, 2, \dots$. Vi har $\max_{0 \leq x \leq 1/4} |g'(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1/4} 2x = \frac{1}{2} < 1$.

Om $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ har vi $x_1 = 2x_0 - x_0^2 = x_0(2 - x_0) > \frac{3}{4}$, vilket ger $x_n > \frac{3}{4}$, $n = 1, 2, \dots$ som i sin tur medför att $x_n \leq \max_{x > 3/4} x(2 - x) = 1$ ty $2x - x^2$ är växande på $(1/2, 1]$ med $g(1) = 1$.

Vi har $\max_{1/2 \leq x \leq 1} |g'(x)| = \max_{1/2 \leq x \leq 1} (2 - 2x) = \frac{1}{2} < 1$.

Vi får funktionen $x_0 \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = f(x_0)$ där

$$f(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq 1/2 \\ 1, & 1/2 < y \leq 1. \end{cases}$$

3. Betrakta randvärdesproblemet för funktionen $u_\epsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(1) \quad \begin{aligned} u'_\epsilon(x) - \epsilon u''_\epsilon(x) &= 0, & 0 < x < 1, \\ u_\epsilon(0) &= 1, \\ u_\epsilon(1) &= 0, \end{aligned}$$

där ϵ är en positiv parameter.

3a. (5p) Formulera en finit differensmetod med godtyckligt antal frihetsgrader, baserad på centraldifferens, som approximerar (1).

3b. (5p) Skriv ett Matlabprogram som utför approximationen i uppgift 3a och visar en figur med approximation av funktionen u_ϵ .

3c. (5p) Denna uppgift handlar om fallet när ϵ är mycket mindre än indelningens steglängd Δx . Betrakta gränsvärdet när $\epsilon \rightarrow 0+$ av finit differensmetoden erhållen i uppgift 3a, i fallet med jämt antal frihetsgrader och Δx är fix. Approximerar denna metod det exakta gränsvärdet $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} u_\epsilon$? Motivera ditt svar.

3a. Gör indelningen $x_n = n\Delta x$, $n = 0, 1, 2, \dots, N + 1$, med $\Delta x = 1/(N + 1)$, och finit differensapproximationerna

$$\begin{aligned} u_n &\simeq u(x_n), \\ \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta x} &\simeq u'(x_n), \\ \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} &\simeq u''(x_n). \end{aligned}$$

som insatt i (1) ger

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta x} - \epsilon \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ u_0 &= 1, \\ u_{N+1} &= 0, \end{aligned}$$

vilket kan skrivas

$$\begin{aligned} u_{n+1} \left(\frac{1}{2\Delta x} - \frac{\epsilon}{\Delta x^2} \right) + u_n \frac{2\epsilon}{\Delta x^2} + u_{n-1} \left(\frac{-1}{2\Delta x} - \frac{\epsilon}{\Delta x^2} \right) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ u_0 &= 1, \\ u_{N+1} &= 0. \end{aligned}$$

Låt

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{2\epsilon}{\Delta x^2} & n = m \\ \frac{1}{2\Delta x} - \frac{\epsilon}{\Delta x^2} & n = m + 1 < N + 1 \\ \frac{-1}{2\Delta x} - \frac{\epsilon}{\Delta x^2} & n = m - 1 > 0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

och

$$b = \begin{bmatrix} u_0 \left(\frac{1}{2\Delta x} + \frac{\epsilon}{\Delta x^2} \right) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3b. Ett exempel på Matlabprogram är

```
N=100;
dx=1/(N+1);
e=0.1; %0.000001; %dx/2;

x=zeros(N,1);
u=zeros(N,1);
b=zeros(N,1);
```

```

A=zeros(N,N);
ue=zeros(N,1);

b(1)=1/(2*dx)+e/(dx*dx);
for m=1:N
    x(m)=m*dx;
    % ue(m)=1-(1-exp(x(m)/e))/(1-exp(1/e)); %exakt lösning
    A(m,m)=2*e/(dx*dx);
    if(m>1)
        A(m,m-1)=-1/(2*dx)-e/(dx*dx);
    end
    if(m<N)
        A(m,m+1)= 1/(2*dx)-e/(dx*dx);
    end
end
u=A\b;
figure(1)
plot(x,u)
figure(2)
plot(x,ue)
%norm(u-ue,inf)

```

3c. När $\epsilon \rightarrow 0$ har vi

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta x} = 0$$

så $u_{n+1} = u_{n-1}$ d.v.s

$$\begin{aligned}
 1 &= u_0 = u_2 = u_4 = \dots = u_N, \\
 0 &= u_{N-1} = u_{N-3} = \dots = u_3 = u_1.
 \end{aligned}$$

Den exakta lösningen till (1) är

$$u(x) = 1 - \frac{e^{x/\epsilon} - 1}{e^{1/\epsilon} - 1}$$

vilket t.ex. kan erhållas med metoden med karakteristiska ekvationen eller genom att lösa $v - \epsilon v' = 0$ och $u' = v$. Vi ser att den exakta lösningen närmar sig 1 utom i ett gränsskikt av storlek ϵ nära $x = 1$ där lösningen avtar mot 0. Den exakta lösningen oscillerar alltså inte mellan 0 och 1 som den approximativa gör när $\epsilon/\Delta x^2$ är mycket mindre än 1.