KTH Matematik

Tentamen, del 1
Tentamen Maj 2017
SF1547 Numeriska metoder
Måndag 29e maj 2017 kl 8.00-11.00

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på dessa papper. Skriv namn och personnummer på varje sida.

Bonus. Skriv bonuspoäng från VT17 här: .... (max=4)
Wiki-Bonus. Wiki-bonuspoäng (endast giltiga för A,B på del 2): ....(max=1)

1. (2p) Antag att $T(h)$ är en numerisk metod med noggrannhetsordning 2. Vi antar att $T(h)$ med Taylorutveckling kan skrivas som ekvationerna (1) och (2):

$$T(h) = T(0) + \frac{1}{2}h^2T''(0) + \frac{1}{6}h^3T'''(0) + \cdots \quad (1)$$

$$T(h/2) = T(0) + \frac{1}{2}(h/2)^2T''(0) + \frac{1}{6}(h/2)^3T'''(0) + \cdots \quad (2)$$

Richardsonextrapolation för detta specialfall kan härledas direkt genom att vi...

- [ ] subtraherar (1) och (2)
- [ ] subtraherar 2×(1) och (2)
- [ ] subtraherar (1) och 2×(2)
- [ ] subtraherar 4×(1) och (2)
- [x] subtraherar (1) och 4×(2)
- [ ] subtraherar 6×(1) och (2)
- [ ] subtraherar (1) och 6×(2)
- [ ] adderar (1) och (2)
- [ ] adderar 2×(1) och (2)
- [ ] adderar (1) och 2×(2)
- [ ] adderar 4×(1) och (2)
- [ ] adderar (1) och 4×(2)
- [ ] adderar 6×(1) och (2)
- [ ] adderar (1) och 6×(2)

2. (2p) Vi ska approximera $f''(x)$ när $f(x) = x\cos(x)$ för $x = 1$ och använder approximationen

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) + f(x+h) - 2f(x)}{h^2}.$$

För $h = 0.01$ blir felet ungefär 10^{-5}. Vilket påstående **stämmer inte**?

Obs: Kryssa endast ett påstående.

- [ ] För små h-värden uppstår kancellation.
- [ ] Detta är en finit differensformel med noggrannhetsordning 2.
- [ ] Felet blir noll när vi ersätter f med $f(x) = x^2$.
- [x] När f är ett polynom av hög grad uppstår Runge's fenomen.
- [ ] När vi halverar h multiplicieras felet ungefär med 1/4.

3. (2p) Det globala felet i Runge-Kuttas metod som implementerad i RKStep.m har i regel...

- [ ] ... noggrannhetsordning $n = 1$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(h)$
- [ ] ... noggrannhetsordning $n = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.62$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(h^{1.62})$
- [ ] ... noggrannhetsordning $n = 2$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(h^2)$
- [x] ... noggrannhetsordning $n = 4$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(h^4)$
- [ ] ... konvergensordning $p = 1$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(|x_{n-1} - x_n|)$
- [ ] ... konvergensordning $p = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.62$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(|y_{n-1} - y(t_{n-1})|^{1.62})$
- [ ] ... konvergensordning $p = 2$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(|y_{n-1} - y(t_{n-1})|^2)$
- [ ] ... konvergensordning $p = 4$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(|y_{n-1} - y(t_{n-1})|^4)$

```
RKStep.m:
function [xut,yut]...
 =RKstep(f,x,y,h)
   k1=h*f(x,y);
   k2=h*f(x+h/2,y+k1/2);
   k3=h*f(x+h/2,y+k2/2);
   k4=h*f(x+h,y+k3);
   yut=y+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
   xut=x+h;
end
```

4. (2p) Vad blir resultatet när vi tillämpar trapetsregeln med 10 (ekvidistanta) delintervall på integralen

$$\int_{-5}^{5} (\sin(\pi t) + 1)\, dt$$

☐ 1/4	☐ 1/3	☐ 3/2	☐ 5/2	☐ 1	☐ 2	☐ 4	☐ 5	☒ 10	
☐ -1/4	☐ -1/3	☐ -3/2	☐ -5/2	☐ -1	☐ -2	☐ -4	☐ -5	☐ -10	☐ något annat

5. (2p) När vi kör **två steg** av Newton's metod tillämpat på den olinjära ekvationen

$$f(x) = x^2 - 1$$

med startvärde $x_0 = 1$ får vi approximationen eller felmeddelande

☐ 0	☐ 2	☐ 2.5	☐ 4	☐ 4.5	☐ 6	☐ 7	☐ Felmeddelande: division med noll
	☐ -2	☐ -2.5	☐ -4	☐ -4.5	☐ -6	☐ -7	☒ Något annat värde

6. (3p) Vad blir resultatet av ett steg av **Euler bakåt** med $h = 0.01$ tillämpat på begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'(t) &= 25y(t)^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Tips: Rötterna till ekvationen $0 = -z + 1 + \alpha z^2$ är $z = 2/(1 \pm \sqrt{1-4\alpha})$.

☐ 1/4	☐ 1/3	☐ 3/2	☐ 5/2	☐ 1	☒ 2	☐ 4	☐ 5	☐ 10	
☐ -1/4	☐ -1/3	☐ -3/2	☐ -5/2	☐ -1	☒ -2	☐ -4	☐ -5	☐ -10	☐ något annat

Vid rättning: Båda svaren räknas som korrekta.

7. (2p) Vi ska lösa ett olinjärt ekvationssystem i n variabler, och har en startgissning som gör att vi behöver approximativt 10 iterationer med Newtons metod i flera variabler. Datorn är sådan att när antalet obekanta är $n = 100$ tar det cirka 1 sekund att lösa **ett linjärt ekvationssystem** i n variabler när man använder Gauss-eliminering. Hur stort ska vi välja n så att det löser det olinjära ekvationssystemet med beräkningstid cirka 10 minuter $\approx$ 640 sek$=10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ sek? Gör uppskattning genom att ersätta $\mathcal{O}(\blacksquare^{\heartsuit})$ med $\blacksquare^{\heartsuit}$.

☐ 10	☐ 20	☐ 40	☐ 60	☐ 80	☐ 200	☒ 400	☐ 600
☐ 800	☐ 1000	☐ 1200	☐ 1400	☐ 1600	☐ 1800	☐ 2000	☐ 4000

8. (2p) Vi vill lösa randvärdesproblemet

$$y''(x) = y(x)^2 + 3\cos(x)$$

där $y(0) = 4$ och $y(\pi) = 0$. För att genomföra matrismetoden diskretiserar vi med $x_0 = 0$, $x_1 = h, \dots, x_{n+1} = \pi$, och behöver då lösa det olinjära ekvationssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ där

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = T\mathbf{y} + \begin{bmatrix} \diamondsuit \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \heartsuit \end{bmatrix} \spadesuit h^2 \begin{bmatrix} y_1^2 + 3\cos(x_1) \\ \vdots \\ y_n^2 + 3\cos(x_n) \end{bmatrix}$$

och $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är en tridiagonal matris som innehåller -2 på diagonalen och övriga värden är 1 eller 0. Vi måste välja $(\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit)$ som

☐ $(0,0,+)$	☐ $(0,\pi,+)$	☐ $(0,4,+)$	☐ $(\pi,0,+)$	☐ $(\pi,4,+)$	☐ $(4,0,+)$	☐ $(4,\pi,+)$
☐ $(0,0,-)$	☐ $(0,\pi,-)$	☐ $(0,4,-)$	☐ $(\pi,0,-)$	☐ $(\pi,4,-)$	☒ $(4,0,-)$	☐ $(4,\pi,-)$
	☐ $(0,-\pi,+)$	☐ $(0,-4,+)$	☐ $(-\pi,0,+)$	☐ $(-\pi,-4,+)$	☐ $(-4,0,+)$	☐ $(-4,-\pi,+)$
	☐ $(0,-\pi,-)$	☐ $(0,-4,-)$	☐ $(-\pi,0,-)$	☐ $(-\pi,-4,-)$	☐ $(-4,0,-)$	☐ $(-4,-\pi,-)$

9. (3p) När vi genomför polynominterpolation med Newton-ansatsen $p(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1)+d_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ och tillämpar det på datapunkter $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $(x_1, y_1) = (-1, 2)$, $(x_2, y_2) = (10, -1)$, $(x_3, y_3) = (0, \pi)$ behöver vi lösa det linjära ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 99 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \spadesuit \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ \heartsuit \end{bmatrix}.$$

Vad är $(\spadesuit, \heartsuit)$?

☐ (1/4,1)	☐ (1/3,1)	☐ (1,1)	☐ (5/2,1)	☐ (-1 ,1)	☐ (2 ,1)	☐ (4 ,1)	☐ (5 ,1)	☐ (10 ,1)
☐ (1/4,-1)	☐ (1/3,-1)	☐ (1,-1)	☐ (5/2,-1)	☐ (-1 ,-1)	☐ (2 ,-1)	☐ (4 ,-1)	☐ (5 ,-1)	☐ (10 ,-1)
☐ (1/4,π)	☐ (1/3,π)	☐ (1,π)	☐ (5/2,π)	☐ (-1 ,π)	☐ (2 ,π)	☐ (4 ,π)	☐ (5 ,π)	☒ (10 ,π)
☐ (1/4,4)	☐ (1/3,4)	☐ (1,4)	☐ (5/2,4)	☐ (-1 ,4)	☐ (2 ,4)	☐ (4 ,4)	☐ (5 ,4)	☐ (10 ,4)