TENTAMEN I GRUNDKURS I NUMERISKA METODER - DEL 2

Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgräns (inkl bonuspoäng): 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximal poäng 50 + bonuspoäng (max 4p). Betygen för A och B reduceras med wiki-bonuspoängen (max 1p). Miniräknare är ej tillåten på denna tentamen. Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag. Då algoritmbeskrivning begärs, avses om inte annat anges beskrivning i Matlab. Eftersom miniräknare ej är tillåten är det tillåtet att lämna enkla beräkningsuttryck oförenklade.

Uppgift 1 Vi vill bestämma $x_1, \ldots, x_n$ så att

$$\begin{aligned} \alpha x_2^2 + \alpha x_3^2 + x_1 &= 1 \\ \alpha x_1^2 + (x_2 - 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} e^{x_3} + \alpha x_2^2 + \alpha x_3 &= 1 + x_2 \\ e^{x_4} + \alpha x_3^2 + \alpha x_4 &= 1 + x_3 \\ &\vdots \\ e^{x_n} + \alpha x_{n-1}^2 + \alpha x_n &= 1 + x_{n-1} \end{aligned}$$

för $\alpha = 1$.

(a) (6p) I varje steg i Newton's metod i flera variabler behöver vi lösa ett linjärt ekvationssystem. Skriv upp detta linjära ekvationssystemet för detta problem när $n = 6$. Ingen programmering krävs.

(b) (4p) Härled en startgissning för $n = 6$, genom att lösa det olinjära ekvationssystemet exakt (för hand) för $\alpha = 0$.

(c) (7p) Skriv ett MATLAB-program som använder sig av Newton's metod för att lösa detta problem (för godtyckligt n). Använd motsvarigheten till startgissningen i (b). Delpoäng kan erhållas även om (a) och (b) är ej korrekta.

Uppgift 2 I följande uppgift ska ni anropa denna funktion som är en implementation av Simpsons regel (sammansatt). `simpson.m`:

```
function I=simpson(f,N,a,b)
# Beräknar en approximation av integralen av f(x) med Simpsons regel
# f är en funktion eller en vektor med värden f(a),f(a+h),... där h=(b-a)/N
# a och b integrationsgränser
# N är antalet intervall
# Exempel: I=simpson(@(s) s^2,0,1,3) ger I=1/3
```

(a) (5p) Skriv en ny funktion `richardson.m`:

```
function II=richardson(f,N,a,b)
```

som anropar `simpson` och genomför Richardsonextrapolation om `f` är en funktion.

(b) (9p) Vi ska nu bestämma lösningen till

$$\int_0^2 \sin(xt)\cos(xt^2)\,dt = x^2$$

i närheten av $x \approx 0$. Skriv ett program som beräknar x med absolutfel mindre än 10^{-10}. Gör integralberäkningen genom ett anrop till `richardson`.

Ni får ej använda inbyggda funktioner som `fzero`, `integral`, `trapz`.

(c) (7p) Skriv ett MATLAB-program som löser randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sin(x)y(x)+x \\ y(0)=0 & \\ y(1)=10 & \end{aligned}$$

och sedan beräknar integralen

$$I = \int_0^1 y(x)^2.$$

Använd dig av anrop till `simpson`.

Uppgift 3 (12p) Vi ska lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t,y(t)) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned}$$

Härled en effektiv metod genom att bestämma α, β och γ som har så hög noggrannhetsordning som möjligt. Metoden har formen

$$y_{k+1} = \alpha y_k + \beta y_{k-1} + \gamma h f(t_k, y_k)$$

Du kan även anta att $y_1 \approx y(a+h)$ är given. Använd ekvidistant diskretisering, dvs $t_0 = a$, $t_1 = a+h$, $\ldots$. Vilken noggrannhetsordning har metoden?