KTH Matematik

TENTAMEN, DEL 1
Omtenta 2017
SF1547 NUMERISKA METODER
Måndag 18e Augusti 2017 kl 8.00-11.00

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på dessa papper. Skriv namn och personnummer på varje sida.

Bonus. Skriv bonuspoäng från VT17 här: .... (max=4)
Wiki-Bonus. Wiki-bonuspoäng (endast giltiga för betyg A,B på del 2): ....(max=1)

1. (2p) Antag att $S(h)$ motsvarar Simpsons regel (sammansatt) med steglängd h. Korrekt applicering av Richardsonextrapolation leder till formeln

$$R(h) = \frac{16S(h) - S(\heartsuit)}{\spadesuit}$$

Vad är $(\heartsuit, \spadesuit)$?

☐ $(h/2, 1)$	☐ $(h/2, -1)$	☐ $(h/2, 2)$	☐ $(h/2, -2)$	☐ $(h/2, 3)$	☐ $(h/2, -3)$
☐ $(h/2, 4)$	☐ $(h/2, -4)$	☐ $(h/2, 15)$	☐ $(h/2, -15)$	☐ $(h/2, 6)$	☐ $(h/2, -6)$
☐ $(h, 1)$	☐ $(h, -1)$	☐ $(h, 2)$	☐ $(h, -2)$	☐ $(h, 3)$	☐ $(h, -3)$
☐ $(h, 4)$	☐ $(h, -4)$	☐ $(h, 15)$	☐ $(h, -15)$	☐ $(h, 6)$	☐ $(h, -6)$
☐ $(2h, 1)$	☐ $(2h, -1)$	☐ $(2h, 2)$	☐ $(2h, -2)$	☐ $(2h, 3)$	☐ $(2h, -3)$
☐ $(2h, 4)$	☐ $(2h, -4)$	☐ $(2h, 15)$	☐ $(2h, -15)$	☐ $(2h, 6)$	☐ $(2h, -6)$

2. (3p) Vad blir resultatet av ett steg av **Euler bakåt** med $h = 0.1$ tillämpat på begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'(t) &= 5y(t) + 10 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

☐ $1/4$	☐ $1/3$	☐ $3/2$	☐ $5/2$	☐ 1	☐ 2	☐ 4	☐ 5	☐ 10
☐ $-1/4$	☐ $-1/3$	☐ $-3/2$	☐ $-5/2$	☐ -1	☐ -2	☐ -4	☐ -5	☐ -10
☐ något annat								

3. (2p) Den vanliga implementationen av Euler framåt (programmet till höger) används för att lösa differentialekvationen $y'(t) = \sin(ty(t)) + 1$, $y(0) = 1$. Vi använder metoden för att beräkna $y(1)$ och får ...

- [ ] ... noggrannhetsordning $n = 1$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(h)$
- [ ] ... noggrannhetsordning $n = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.62$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(h^{1.62})$
- [ ] ... noggrannhetsordning $n = 2$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(h^2)$
- [ ] ... noggrannhetsordning $n = 4$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(h^4)$
- [ ] ... konvergensordning $p = 1$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(|y_{n-1} - y_n|)$
- [ ] ... konvergensordning $p = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.62$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(|y_{n-1} - y(t_{n-1})|^{1.62})$
- [ ] ... konvergensordning $p = 2$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(|y_{n-1} - y(t_{n-1})|^2)$
- [ ] ... konvergensordning $p = 4$ dvs felet$\approx \mathcal{O}(|y_{n-1} - y(t_{n-1})|^4)$

```
f=@(t,y) sin(t*y)+1;
n=10; dt=1/n;
yv=[];  t=0; y=1;
for i=1:n;
    y=y+dt*f(t,y); t=t+dt;
    yv=[yv;y];
end
```

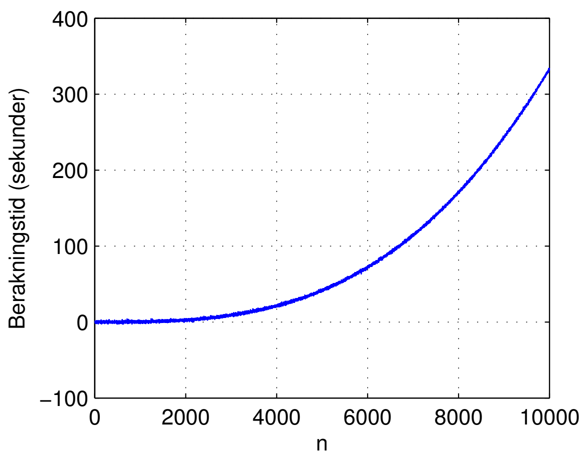
4. (2p) Vi vill beräkna $f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+1}$ och använder flyttalsaritmetik. Vi bortser från "underflow" och "overflow". Vilket påstående **stämmer inte**?

Obs: Kryssa endast ett påstående.

- [ ] Varje individuell operation i uttrycket har relativ noggrannhet mindre än ϵ_{mach}
- [ ] Uttrycket $g(x) = \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$ är matematiskt ekvivalent med $f(x)$, men ger annat resultat i flyttalsaritmetik.
- [ ] I uttrycket $g(x) = \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$ uppstår kancellation för lika många x-värden som $f(x)$, men ej för samma x-värden.
- [ ] För $x \approx 3$ uppstår kancellation i $f(x)$.
- [ ] För $x \approx -3$ uppstår kancellation i $f(x)$.
- [ ] För $x \approx 1$ uppstår kancellation i $f(x)$.
- [ ] För $x \approx -1$ uppstår kancellation i $f(x)$.

5. (2p)

Vi ska lösa ett olinjärt ekvationssystem i n variabler med Newton's metod. Till förfogande har vi en startvektor med fel 0.1 och terminerar Newton's metod när felet är 10^{-16}. För att lösa **ett linjärt ekvationssystem** i n variabler behövs (på en given dator) beräkningstid enligt figur till höger. Gör uppskattning av den totala beräkningstiden genom att anta att felet i Newton's metod beter sig som $e_{k+1} = e_k^2$. Hur stort n kan vi välja för att få total beräkningstid ungefär 8 minuter?



☐ 10	☐ 50	☐ 100	☐ 200	☐ 300	☐ 400	☐ 600	☐ 800
☐ 1000	☐ 1200	☐ 1400	☐ 1600	☐ 1800	☐ 2000	☐ 4000	☐ 7000

6. (3p) Skriv om som ett första ordningens differentialekvation (standardform) och tillämpa framåt Euler på problemet

$$y''(t) = y(t) + y'(t) + t, \quad y(0) = 1 \;\; y'(0) = 0.$$

Med steglängd $h = 0.1$ får vi approximationen av $(y(h), y'(h))$:

☐ $(-1, -0.2)$ ☐ $(-1, -0.1)$ ☐ $(-1, 0)$ ☐ $(-1, 0.1)$ ☐ $(-1, 0.2)$ ☐ $(-1, 1)$ ☐ $(-1, 1.1)$
☐ $(0, -0.2)$ ☐ $(0, -0.1)$ ☐ $(0, 0)$ ☐ $(0, 0.1)$ ☐ $(0, 0.2)$ ☐ $(0, 1)$ ☐ $(0, 1.1)$
☐ $(1, -0.2)$ ☐ $(1, -0.1)$ ☐ $(1, 0)$ ☐ $(1, 0.1)$ ☐ $(1, 0.2)$ ☐ $(1, 1)$ ☐ $(1, 1.1)$
☐ något annat

7. (2p) Vi tillämpar Newton's metod (i två variabler) på problemet

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha + 1 \\ 0 &= e^{x_1} + x_2^2 - 1 \end{aligned}$$

Hjälp: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
Resultatet av ett steg med Newton's metod i flera variabler och startvektor $(0, 1)$ blir ...

☐ $(1-\alpha, -2\alpha)$ ☐ $(1-\alpha, -\alpha)$ ☐ $(1-\alpha, \alpha)$ ☐ $(1-\alpha, 2\alpha)$ ☐ $(1-\alpha, 3\alpha)$
☐ $(1+\alpha, -2\alpha)$ ☐ $(1+\alpha, -\alpha)$ ☐ $(1+\alpha, \alpha)$ ☐ $(1+\alpha, 2\alpha)$ ☐ $(1+\alpha, 3\alpha)$
☐ $(\alpha, -2\alpha)$ ☐ $(\alpha, -\alpha)$ ☐ (α, α) ☐ $(\alpha, 2\alpha)$ ☐ $(\alpha, 3\alpha)$
☐ $(1+2\alpha, -2\alpha)$ ☐ $(1+2\alpha, -\alpha)$ ☐ $(1+2\alpha, \alpha)$ ☐ $(1+2\alpha, 2\alpha)$ ☐ $(1+2\alpha, 3\alpha)$
☐ Något annat värde

8. (2p) Låt

$$f(x) = 3 + \int_0^1 \exp(x \sin(\pi z))\, dz$$

så att $f'(x) = \int_0^1 \sin(\pi z) \exp(x \sin(\pi z))\, dz$. Använd Newton's metod på $f(x) = 0$ med startgissning 0. Använd trapetsregeln med $h = 0.5$ för att approximera integralerna. Resultatet av ett steg blir approximationen...

☐ 1/4 ☐ 1/3 ☐ 3/2 ☐ 5/2 ☐ 3.5 ☐ 4.5 ☐ 4 ☐ 8 ☐ 10
☐ −1/4 ☐ −1/3 ☐ −3/2 ☐ −5/2 ☐ −3.5 ☐ −4.5 ☐ −4 ☐ −8 ☐ −10
☐ något annat

9. (2p) Inskjutningsmetoden för randvärdesproblem kan betraktas som en kombination av två metoder i kursen. Vilka två metoder kan man kombinera för att genomföra inskjutningsmetoden?

☐ Newton's metod och Gauss-eliminering ☐ Newton's metod och Simpson
☐ Newton's metod och Richardson ☐ Newton's metod och Gauss-Newton
☐ Euler framåt och Newton-ansatsen ☐ Runge-Kutta och Newton-ansatsen
☐ Simpsons regel och Newton-ansatsen ☐ Euler framåt och Vandermondematrisen
☐ Sekantmetoden och Richardson ☐ Sekantmetoden och Euler framåt
☐ Sekantmetoden och polynominterpolation ☐ Sekantmetoden och matrismetoden