

TENTAMEN, DEL 1
Omtenta 2017
 SF1547 NUMERISKA METODER
 Måndag 18e Augusti 2017 kl 8.00-11.00

Namn:

Personnummer:..... **Program och årskurs:**

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Skriv svaren på dessa papper. Skriv namn och personnummer på varje sida.

Bonus. Skriv bonuspoäng från VT17 här: (max=4)

Wiki-Bonus. Wiki-bonuspoäng (endast giltiga för betyg A,B på del 2):(max=1)

1. (2p) Antag att $S(h)$ motsvarar Simpsons regel (sammansatt) med steglängd h . Korrekt applicering av Richardsonextrapolation leder till formeln

$$R(h) = \frac{16S(h) - S(\heartsuit)}{\spadesuit}$$

Vad är (\heartsuit, \spadesuit)?

<input type="checkbox"/> $(h/2, 1)$	<input type="checkbox"/> $(h/2, -1)$	<input type="checkbox"/> $(h/2, 2)$	<input type="checkbox"/> $(h/2, -2)$	<input type="checkbox"/> $(h/2, 3)$	<input type="checkbox"/> $(h/2, -3)$
<input type="checkbox"/> $(h/2, 4)$	<input type="checkbox"/> $(h/2, -4)$	<input type="checkbox"/> $(h/2, 15)$	<input type="checkbox"/> $(h/2, -15)$	<input type="checkbox"/> $(h/2, 6)$	<input type="checkbox"/> $(h/2, -6)$
<input type="checkbox"/> $(h, 1)$	<input type="checkbox"/> $(h, -1)$	<input type="checkbox"/> $(h, 2)$	<input type="checkbox"/> $(h, -2)$	<input type="checkbox"/> $(h, 3)$	<input type="checkbox"/> $(h, -3)$
<input type="checkbox"/> $(h, 4)$	<input type="checkbox"/> $(h, -4)$	<input type="checkbox"/> $(h, 15)$	<input type="checkbox"/> $(h, -15)$	<input type="checkbox"/> $(h, 6)$	<input type="checkbox"/> $(h, -6)$
<input type="checkbox"/> $(2h, 1)$	<input type="checkbox"/> $(2h, -1)$	<input type="checkbox"/> $(2h, 2)$	<input type="checkbox"/> $(2h, -2)$	<input type="checkbox"/> $(2h, 3)$	<input type="checkbox"/> $(2h, -3)$
<input type="checkbox"/> $(2h, 4)$	<input type="checkbox"/> $(2h, -4)$	<input checked="" type="checkbox"/> $(2h, 15)$	<input type="checkbox"/> $(2h, -15)$	<input type="checkbox"/> $(2h, 6)$	<input type="checkbox"/> $(2h, -6)$

2. (3p) Vad blir resultatet av ett steg av **Euler bakåt** med $h = 0.1$ tillämpat på begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'(t) &= 5y(t) + 10 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

<input type="checkbox"/> 1/4	<input type="checkbox"/> 1/3	<input type="checkbox"/> 3/2	<input type="checkbox"/> 5/2	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input checked="" type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 10
<input type="checkbox"/> -1/4	<input type="checkbox"/> -1/3	<input type="checkbox"/> -3/2	<input type="checkbox"/> -5/2	<input type="checkbox"/> -1	<input type="checkbox"/> -2	<input type="checkbox"/> -4	<input type="checkbox"/> -5	<input type="checkbox"/> -10
<input type="checkbox"/> något annat								

3. (2p) Den vanliga implementationen av Euler framåt (programmet till höger) används för att lösa differentialekvationen $y'(t) = \sin(ty(t)) + 1$, $y(0) = 1$. Vi använder metoden för att beräkna $y(1)$ och får ...

- ... noggrannhetsordning $n = 1$ dvs felet $\approx \mathcal{O}(h)$
- ... noggrannhetsordning $n = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.62$ dvs felet $\approx \mathcal{O}(h^{1.62})$
- ... noggrannhetsordning $n = 2$ dvs felet $\approx \mathcal{O}(h^2)$
- ... noggrannhetsordning $n = 4$ dvs felet $\approx \mathcal{O}(h^4)$
- ... konvergensordning $p = 1$ dvs felet $\approx \mathcal{O}(|y_{n-1} - y_n|)$
- ... konvergensordning $p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.62$ dvs felet $\approx \mathcal{O}(|y_{n-1} - y(t_{n-1})|^{1.62})$
- ... konvergensordning $p = 2$ dvs felet $\approx \mathcal{O}(|y_{n-1} - y(t_{n-1})|^2)$
- ... konvergensordning $p = 4$ dvs felet $\approx \mathcal{O}(|y_{n-1} - y(t_{n-1})|^4)$

```
f=@(t,y) sin(t*y)+1;
n=10; dt=1/n;
yv=[]; t=0; y=1;
for i=1:n;
    y=y+dt*f(t,y); t=t+dt;
    yv=[yv;y];
end
```

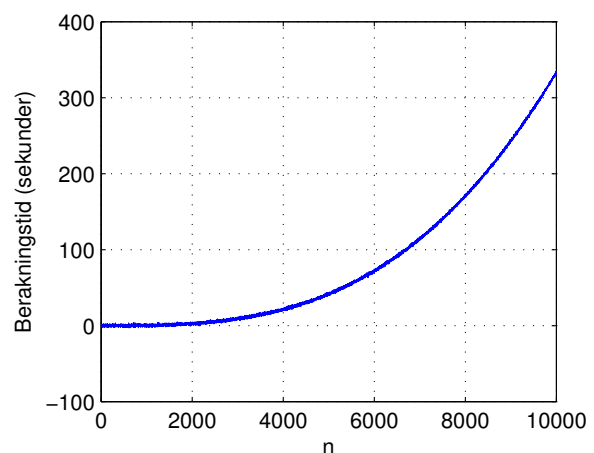
4. (2p) Vi vill beräkna $f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+1}$ och använder flyttalsaritmetik. Vi bortser från “underflow” och “overflow”. Vilket påstående **stämmer inte**?

Obs: Kryssa endast ett påstående.

- Varje individuell operation i uttrycket har relativ noggrannhet mindre än ϵ_{mach}
- Uttrycket $g(x) = \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$ är matematiskt ekvivalent med $f(x)$, men ger annat resultat i flyttalsaritmetik.
- I uttrycket $g(x) = \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$ uppstår kancellation för lika många x -värden som $f(x)$, men ej för samma x -värden.
- För $x \approx 3$ uppstår kancellation i $f(x)$.
- För $x \approx -3$ uppstår kancellation i $f(x)$.
- För $x \approx 1$ uppstår kancellation i $f(x)$.
- För $x \approx -1$ uppstår kancellation i $f(x)$.

5. (2p)

Vi ska lösa ett olinjärt ekvationssystem i n variabler med Newton's metod. Till förfogande har vi en startvektor med fel 0.1 och terminerar Newton's metod när felet är 10^{-16} . För att lösa **ett linjärt ekvationssystem** i n variabler behövs (på en given dator) beräkningstid enligt figur till höger. Gör uppskattning av den totala beräkningstiden genom att anta att felet i Newton's metod beter sig som $e_{k+1} = e_k^2$. Hur stort n kan vi välja för att få total beräkningstid ungefär 8 minuter?



- 10 50 100 200 300 400 600 800
- 1000 1200 1400 1600 1800 2000 4000 7000

6. (3p) Skriv om som ett första ordningens differentialekvation (standardform) och tillämpa framåt Euler på problemet

$$y''(t) = y(t) + y'(t) + t, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0.$$

Med steglängd $h = 0.1$ får vi approximationen av $(y(h), y'(h))$:

- | | | | | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|--|------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> (-1, -0.2) | <input type="checkbox"/> (-1, -0.1) | <input type="checkbox"/> (-1, 0) | <input type="checkbox"/> (-1, 0.1) | <input type="checkbox"/> (-1, 0.2) | <input type="checkbox"/> (-1, 1) | <input type="checkbox"/> (-1, 1.1) |
| <input type="checkbox"/> (0, -0.2) | <input type="checkbox"/> (0, -0.1) | <input type="checkbox"/> (0, 0) | <input type="checkbox"/> (0, 0.1) | <input type="checkbox"/> (0, 0.2) | <input type="checkbox"/> (0, 1) | <input type="checkbox"/> (0, 1.1) |
| <input type="checkbox"/> (1, -0.2) | <input type="checkbox"/> (1, -0.1) | <input type="checkbox"/> (1, 0) | <input checked="" type="checkbox"/> (1, 0.1) | <input type="checkbox"/> (1, 0.2) | <input type="checkbox"/> (1, 1) | <input type="checkbox"/> (1, 1.1) |
| <input type="checkbox"/> något annat | | | | | | |

7. (2p) Vi tillämpar Newton's metod (i två variabler) på problemet

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha + 1 \\ 0 &= e^{x_1} + x_2^2 - 1 \end{aligned}$$

Hjälp: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$

Resultatet av ett steg med Newton's metod i flera variabler och startvektor $(0, 1)$ blir ...

- | | | | | |
|--|--|--|---|---|
| <input type="checkbox"/> $(1 - \alpha, -2\alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(1 - \alpha, -\alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(1 - \alpha, \alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(1 - \alpha, 2\alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(1 - \alpha, 3\alpha)$ |
| <input type="checkbox"/> $(1 + \alpha, -2\alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(1 + \alpha, -\alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(1 + \alpha, \alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(1 + \alpha, 2\alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(1 + \alpha, 3\alpha)$ |
| <input type="checkbox"/> $(\alpha, -2\alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(\alpha, -\alpha)$ | <input type="checkbox"/> (α, α) | <input type="checkbox"/> $(\alpha, 2\alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(\alpha, 3\alpha)$ |
| <input type="checkbox"/> $(1 + 2\alpha, -2\alpha)$ | <input checked="" type="checkbox"/> $(1 + 2\alpha, -\alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(1 + 2\alpha, \alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(1 + 2\alpha, 2\alpha)$ | <input type="checkbox"/> $(1 + 2\alpha, 3\alpha)$ |
| <input type="checkbox"/> Något annat värde | | | | |

8. (2p) Låt

$$f(x) = 3 + \int_0^1 \exp(x \sin(\pi z)) dz$$

så att $f'(x) = \int_0^1 \sin(\pi z) \exp(x \sin(\pi z)) dz$. Använd Newton's metod på $f(x) = 0$ med startgissning 0. Använd trapetsregeln med $h = 0.5$ för att approximera integralerna. Resultatet av ett steg blir approximationen...

- | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|--|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1/4 | <input type="checkbox"/> 1/3 | <input type="checkbox"/> 3/2 | <input type="checkbox"/> 5/2 | <input type="checkbox"/> 3.5 | <input type="checkbox"/> 4.5 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 10 |
| <input type="checkbox"/> -1/4 | <input type="checkbox"/> -1/3 | <input type="checkbox"/> -3/2 | <input type="checkbox"/> -5/2 | <input type="checkbox"/> -3.5 | <input type="checkbox"/> -4.5 | <input type="checkbox"/> -4 | <input checked="" type="checkbox"/> -8 | <input type="checkbox"/> -10 |
| <input type="checkbox"/> något annat | | | | | | | | |

9. (2p) Inskjutningsmetoden för randvärdesproblem kan betraktas som en kombination av två metoder i kursen. Vilka två metoder kan man kombinera för att genomföra inskjutningsmetoden?

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Newton's metod och Gauss-eliminering | <input type="checkbox"/> Newton's metod och Simpson |
| <input type="checkbox"/> Newton's metod och Richardson | <input type="checkbox"/> Newton's metod och Gauss-Newton |
| <input type="checkbox"/> Euler framåt och Newton-ansatsen | <input type="checkbox"/> Runge-Kutta och Newton-ansatsen |
| <input type="checkbox"/> Simpsons regel och Newton-ansatsen | <input type="checkbox"/> Euler framåt och Vandermondematriisen |
| <input type="checkbox"/> Sekantmetoden och Richardson | <input checked="" type="checkbox"/> Sekantmetoden och Euler framåt |
| <input type="checkbox"/> Sekantmetoden och polynominterpolation | <input type="checkbox"/> Sekantmetoden och matrismetoden |