

TENTAMEN I GRUNDKURS I NUMERISKA METODER - DEL 2

Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgräns (inkl bonuspoäng): 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximal poäng 50 + bonuspoäng (max 4p). Betygen för A och B reduceras med wiki-bonuspoängen (max 1p). Miniräknare är ej tillåten på denna tentamen. Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag. Då algoritmbeskrivning begärs, avses om inte annat anges beskrivning i Matlab. Eftersom miniräknare ej är tillåten är det tillåtet att lämna enkla beräkningsuttryck oförenklade.

OBS: Du får ej använda matlabs inbyggda funktioner för ODE-lösning, integration, derivering, eller funktioner för att hitta nollställe.

Uppgift 1 [13p] Vi vill lösa det olinjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 1 &= ze^{x+y} + f(x+y) \\ 2 &= x+y+z+e^{x+z} \\ 1 &= \sin(x+y+z) \end{aligned}$$

där $f(x+y)$ är en komplicerad funktion endast tillgänglig i form av ett program. Vi vill lösa detta problem med Newton's metod i flera variabler.

- (a) Ställ upp en metod för Jacobianberäkning för det olinjära ekvationssystemet. Elementen i Jacobianen ska beräknas med noggrannhetsordning 2. Skriv som program i en funktionsfil (MATLAB eller julia). Programmet får anropa f endast för två gånger.
- (b) Använd (a) och skriv ett program som beräknar lösningen till det olinjära ekvationssystemet. Bestäm ett startvärde från approximationen $x \approx y \approx 1$.

Lösning:

- (a) Använd finita differenser för ett två element:

$$J(\mathbf{x}) \approx \begin{bmatrix} ze^{x+y} + \frac{f(x+h+y)-f(x-h+y)}{2h} & ze^{x+y} + \frac{f(x+h+y)-f(x-h+y)}{2h} & e^{x+y} \\ 1 + e^{x+z} & 1 & 1 + e^{x+z} \\ \cos(x+y+z) & \cos(x+y+z) & \cos(x+y+z) \end{bmatrix}$$

Observera att finita differenserna blir desamma för båda partiella derivator så att vi i programkoden bara behöver beräkna $f1=f(x+h+y)$ och $f2=f(x-h+y)$ en gång.

```
function J(x,y,z)
    f1=f(x+h+y)
    f2=f(x-h+y)
```

```

J=zeros(3,3);
J(1,1)=z*exp(x+y)+(f1-f2)/(2*h);
J(1,2)=z*exp(x+y)+(f1-f2)/(2*h)
J(1,3)=exp(x+y)
J(2,1)=1+exp(x+z);
J(2,2)=1;
J(2,3)=1+exp(x+z);
J(3,1)=cos(x+y+z);
J(3,2)=cos(x+y+z);
J(3,3)=cos(x+y+z);

```

- (b) Startgissning för z_0 erhålls till exempel genom att betrakta den sista ekvationen och lösa den exakt givet $x_0 = y_0 = 1$. Newtons metod i flera variabler startgissning från sista ekvationen blir $\pi/2 = x + y + z$ dvs $z = \pi/2 - x - y$.

```

x=[1;1;pi/2-1-1];
h=inf;
TOL=1e-10;
while (norm(h)>TOL)
    h=J(x(1),x(2),x(3))\ff(x);
    x=x-h;
end

```

där funktionen f definieras som

```

function y=ff(x)
    y=zeros(3,1);
    y(1)=x(3)*exp(x(1)+x(2))+f(x(1)+x(2))-1;
    y(2)=x(1)+x(2)+x(3)+exp(x(1)+x(3))-2;
    y(3)=sin(x(1)+x(2)+x(3))-1
end

```

Uppgift 2 [12p] Betrakta en likformig diskretisering av intervallet $[a, b]$, dvs $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 2$ med steglängd h . Vi vill approximera integralen (av en snäll funktion f)

$$\int_a^b f(x) dx \approx I(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f(x_i + h/2).$$

Bestäm det α_i som ger högst noggrannhetsordning. Välj α_i så att det beror på h men inte f . Motivering/bevis krävs.

Lösning: På samma sätt som härledningar för andra integralapproximationer tittar vi på felet i varje intervall, dvs felet är

$$\int_a^b f(x) dx - I(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) - \alpha_i f(x_i + h/2).$$

Vi studerar felet i varje term (vi antar utan förlust av generalitet $i = 0$)

$$\int_0^h f(x_0 + s) ds - \alpha_i f(x_0 + h/2) \quad (1)$$

Taylorutveckling ger

$$\begin{aligned} f(x_0 + s) &= f(x_0) + sf'(x_0) + \frac{s^2}{2}f''(x_0) + O(s^3) \\ f(x_0 + h/2) &= f(x_0) + \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{h^2}{8}f''(x_0) + O(h^3) \end{aligned}$$

Termvis integration ger

$$\int_0^h f(x_0 + s) ds = hf(x_0) + \frac{h^2}{2}f'(x_0) + \frac{h^3}{3}f''(x_0) + O(h^4)$$

Vi samlar termerna (1) efter derivator

$$\int_0^h f(x_0 + s) ds - \alpha_0 f(x_0 + h/2) = f(x_0)(h - \alpha_0) + f'(x_0)(\frac{h^2}{2} - \alpha_0 \frac{h}{2}) + f''(x_0)(\frac{h^3}{3} - \alpha_0 \frac{h^2}{8}) + O(\alpha_0 h^3) + O(h^4).$$

Vi ser att valet $\alpha_0 = h$ gör att de första två termerna försvinner (och annars försvinner de inte). Felet i en term är då $O(h^3)$. Felet för hela integralen blir

$$|\int_a^b f(x) dx - I(h)| = |\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_i+h} f(x) - \alpha_i f(x_i + h/2)| = nO(h^3) = ((b-a)/h)O(h^3) = O(h^2).$$

Uppgift 3 [11p] Ingenjören Irina har under den varma försommaren tagit ett foto på en blomma och vill analysera hur väl blomman överensstämmer med en mjuk kurva. Vi ska anpassa kurvan som ges av koordinaterna (där $0 \leq \theta \leq 2\pi$)

$$x(\theta) = x_0 + r|\sin(3\theta + \pi/2)|\cos(\theta + t_0) \quad (2a)$$

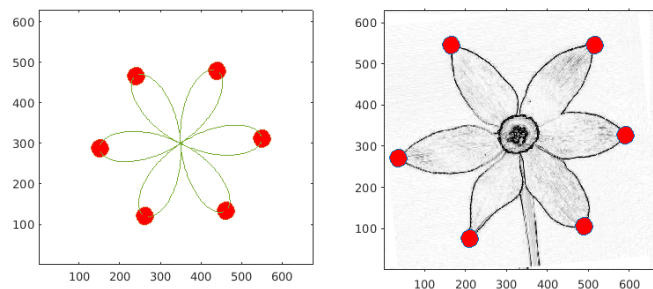
$$y(\theta) = y_0 + r|\sin(3\theta + \pi/2)|\sin(\theta + t_0) \quad (2b)$$

och plottas så här

Var god vänd $\rightarrow$

```
xv=linspace(0,2*pi,700); t0=pi/80;
plot(x0+r*abs(sin(3*xv+pi/2)).*cos(xv+t0),y0+r*abs(sin(3*xv+pi/2)).*sin(xv+t0))
```

Kurvan visas i figuren till vänster för vissa x_0 , y_0 och r . För att anpassa kurvan har hon mätt hörnen av blommans blad markerade med prickar och sparat dess koordinater i x_b och y_b . Sex punkter i av funktionen (2) är markerade i figuren till vänster för θ -värden $0, \pi/3, 2\pi/3, 3\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$. Bestäm kurvan så att hörnen i de två bilderna passar ihop (i minstakvadratmening) genom att hitta de bästa valen av x_0 , y_0 och r . Du kan svara antingen med ett program (matlab eller julia) eller med en beskrivning av A , $\mathbf{x}$ och $\mathbf{b}$ i det överbestämda systemet.



Lösning: Vi betraktar ekvationerna motsvarande de sex punkterna:

$$\begin{aligned}
 0 &\approx -x_{b1} + x_0 + r |\sin(3\theta_1 + \pi/2)| \cos(\theta_1 + t_0) \\
 0 &\approx -y_{b1} + y_0 + r |\sin(3\theta_2 + \pi/2)| \sin(\theta_1 + t_0) \\
 0 &\approx -x_{b2} + x_0 + r |\sin(3\theta_2 + \pi/2)| \cos(\theta_2 + t_0) \\
 0 &\approx -y_{b2} + y_0 + r |\sin(3\theta_2 + \pi/2)| \sin(\theta_2 + t_0) \\
 &\vdots \\
 0 &\approx -x_{b6} + x_0 + r |\sin(3\theta_6 + \pi/2)| \cos(\theta_6 + t_0) \\
 0 &\approx -y_{b6} + y_0 + r |\sin(3\theta_6 + \pi/2)| \sin(\theta_6 + t_0)
 \end{aligned}$$

Detta är ett linjärt överbestämt ekvationssystem eftersom vi kan skriva

$$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}$$

där

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ r \end{bmatrix}$$

och

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & |\sin(3\theta_1 + \pi/2)| \cos(\theta_1 + t_0) \\ 0 & 1 & |\sin(3\theta_1 + \pi/2)| \sin(\theta_1 + t_0) \\ 1 & 0 & |\sin(3\theta_2 + \pi/2)| \cos(\theta_2 + t_0) \\ 0 & 1 & |\sin(3\theta_2 + \pi/2)| \sin(\theta_2 + t_0) \\ \vdots & & \\ 1 & 0 & |\sin(3\theta_6 + \pi/2)| \cos(\theta_6 + t_0) \\ 0 & 1 & |\sin(3\theta_6 + \pi/2)| \sin(\theta_6 + t_0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_{b1} \\ y_{b1} \\ x_{b2} \\ y_{b2} \\ \vdots \\ x_{b6} \\ y_{b6} \end{bmatrix}$$

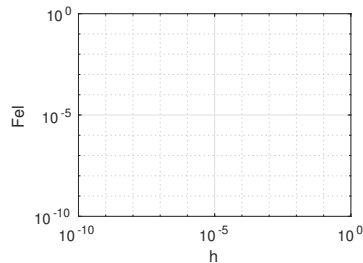
Uppgift 4 [14p] Vi vill lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}
 y''(t) &= 2y(t) + x(t) + 1 \\
 x'(t) &= y(t) + x(t)
 \end{aligned}$$

med $x(1) = 1$, $y(1) = 3$ och $y'(1) = 4$.

- (a) Skriv om problemet på standardform, dvs som ett första ordningens ODE-system. Använd ekvationer. Ingen programmering.

- (b) Skriv ett program som genomför Euler bakåt med $h = 0.1$ på systemet i (a) och beräknar $x(2.5)$.
- (c) Hur beter sig felet i metoden i (b) som funktion av h ? Sketcha en figur i en log-log figur enligt nedan. Markera tydligt värden på x- och y-axlar.
- OBS: Du skriv/rita svaret i dina tentapapper inte på detta uppgiftsformulär.



Lösning:

- (a) Vi definierar

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

Derivering och insättning ger

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2(t) \\ 2z_1(t) + z_3(t) + 1 \\ z_1(t) + z_3(t) \end{bmatrix}$$

Vi kan därför skriva

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (b) Bakåt Euler definieras av

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{z}_k + h\mathbf{f}(\mathbf{z}_{k+1}) \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{z}_k + h(A\mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Denna ekvation kan omformuleras till

$$\mathbf{z}_{k+1} = (I - hA)^{-1}(\mathbf{z}_k + h\mathbf{b}).$$

MATLAB program:

```
A=[ 0, 1,0; 2, 0,1; 1,0,1];
b=[0;1;0];
h=0.1;
t=1;
z=[3;4;1]
```

```

while t<2.5
    z=(eye(3)-h*A)\(z-h*b);
    t=t+h;
end
x25=z(3);

```

(c) Metoden har noggrannhetsordning 1 så figuren blir:

