KTH Matematik

TENTAMEN, DEL 1
Tentamen Augusti 2018
SF1547 NUMERISKA METODER
Fredag 17 Augusti 2018 kl 8.00-11.00

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Markera svaren på dessa papper. Skriv namn och personnummer på varje sida.

Bonus. Skriv bonuspoäng från VT18 här: .... (max=4)
Wiki-Bonus. Wiki-bonuspoäng (endast giltiga för A,B på del 2): ....(max=1)
Endast för statistisk, ej bedömning. Jag gick på föreläsningar ☐ De flesta ☐ Några ☐ Inga

---

1. (2p) Vad stämmer om Newtonansatsen och Vandermondesystem vid polynominterpolation?

- [ ] Vandermondesystemet går snabbare att lösa
- [ ] Det uppstår mindre avrundningsfel om man använder vandermondesystem
- [x] Newtonansatsen leder till en triangulär matris och det uppstår mindre avrundningsfel
- [ ] Newtonansatsen leder aldrig till hackiga kurvor
- [ ] Vandermondematrisen går att generalisera till överbestämda system och Newtonansatsen går inte att generalisera
- [ ] Newtonansatsen leder till mindre approximationsfel (om man bortser från avrundningsfel)

2. (2p) Vi tillämpar sekantmetoden på den olinjära ekvationen

$$f(x) = x^2 - 1$$

med startgissning $x_0 = \alpha$ och $x_1 = 1$ där $|\alpha| \neq 1$ och $\alpha \neq 0$. Vad blir $f(x_2)$?

☐ $0+\alpha$	☐ $2+\alpha$	☐ $3+\alpha$	☐ $9+\alpha$	☐ $12+\alpha$	☐ $27+\alpha$	☐ $100+\alpha$
☒ 0	☐ 2	☐ 3	☐ 9	☐ 12	☐ 27	☐ 100
☐ $0-\alpha$	☐ $2-\alpha$	☐ $3-\alpha$	☐ $9-\alpha$	☐ $12-\alpha$	☐ $27-\alpha$	☐ $100-\alpha$
☐ $0+\alpha^2$	☐ $2+\alpha^2$	☐ $3+\alpha^2$	☐ $9+\alpha^2$	☐ $12+\alpha^2$	☐ $27+\alpha^2$	☐ $100+\alpha^2$
☐ $0+\alpha^3$	☐ $2+\alpha^3$	☐ $3+\alpha^3$	☐ $9+\alpha^3$	☐ $12+\alpha^3$	☐ $27+\alpha^3$	☐ $100+\alpha^3$

3. (2p) Vi vill bestämma $z = (100x_* - \alpha)/2$ där x_* är den rot till ekvationen

$$f(x) = x^2 - 1 - \frac{1}{49x^2}$$

som ligger närmast 1. Gör en uppskattning av x_* med Newtons metod (ett steg med startgissning $x_0 = 1$). Antag att Newton's metod genomförs utan varken kancellation eller avrundningsfel. Kancellation i beräkningen av $z = (100x_* - \alpha)/2$ uppstår när $\alpha \approx$

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 10	☐ 11	☐ 23	☐ 26	☐ 51	☒ 101
	☐ -1	☐ -2	☐ -3	☐ -10	☐ -11	☐ -23	☐ -26	☐ -51	☐ -101

4. (2p) Låt $u_1, \ldots, u_n$ vara lösningen till detta linjära ekvationssystem

$$\left(\begin{bmatrix} -2/h^2 + f(x_1) & 1/h^2 & & \\ 1/h^2 & -2/h^2 + f(x_2) & \ddots & \\ & \ddots & & 1/h^2 \\ & & 1/h^2 & -2/h^2 + f(x_n) \end{bmatrix} + \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & \ddots & -1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{bmatrix}.$$

Lösningen motsvarar en centraldifferensdiskretisering av randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} u''(x) &= \diamondsuit f(x) u(x) + \spadesuit \cdot u'(x) + \heartsuit \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Tips: $u'(x_n) \approx (u_{n+1} - u_{n-1})/(2h)$

där $h = 1/(n+1)$ och $(\diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit)$=

☐ $(+,1,1)$	☐ $(+,-1,1)$	☐ $(+,2,1)$	☐ $(+,-2,1)$	☐ $(+,1/2,1)$	☐ $(+,-1/2,1)$
☐ $(+,1,x)$	☐ $(+,-1,x)$	☐ $(+,2,x)$	☐ $(+,-2,x)$	☐ $(+,1/2,x)$	☐ $(+,-1/2,x)$
☐ $(+,1,x^2)$	☐ $(+,-1,x^2)$	☐ $(+,2,x^2)$	☐ $(+,-2,x^2)$	☐ $(+,1/2,x^2)$	☐ $(+,-1/2,x^2)$
☐ $(-,1,x)$	☐ $(-,-1,x)$	☐ $(-,2,x)$	☐ $(-,-2,x)$	☐ $(-,1/2,x)$	☐ $(-,-1/2,x)$
☐ $(-,1,x^2)$	☐ $(-,-1,x^2)$	☒ $(-,2,x^2)$	☐ $(-,-2,x^2)$	☐ $(-,1/2,x^2)$	☐ $(-,-1/2,x^2)$

5. (2p) Låt $\tilde{x}$ och $\tilde{y}$ vara approximationer av x och y med absolutfelgränser E_x och E_y, och relativfelgränser R_x och R_y. Vi låter $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$ vara en approximation av $z = x - y$. Låt E_z vara en absolutfelgräns för $\tilde{z}$ och R_z motsvarande relativfelgräns. Hur kan vi beräkna en absolutfelgräns eller en relativfelgräns?

☐ $R_z = R_x + R_y$	☐ $R_z = R_x - R_y$	☐ $R_z = R_x R_y$	☐ $R_z = R_x/R_y$	☐ $R_z = R_y/R_x$
☒ $E_z = E_x + E_y$	☐ $E_z = E_x - E_y$	☐ $E_z = E_x E_y$	☐ $E_z = E_x/E_y$	☐ $E_z = E_y/E_x$

6. (2p) En MATLAB-funktion `f(x)` genomför en komplicerad beräkning. På en given dator tar det 3 minuter att göra en funktionsevaluering. Vi vill beräkna $\int_0^1 f(x)\,dx$ numeriskt. Vi använder en effektiv implementation av trapetsregeln (sammansatt) och anpassar diskretiseringen så att vi får beräkningstid 5 timmar (dvs 300 minuter). Gör uppskattning genom att anta att felet är h^p, där p är metodens noggrannhetsordning. Hur stort blir felet?

☐ 10^{-1}	☐ 10^{-2}	☐ 10^{-3}	☒ 10^{-4}	☐ 10^{-5}
☐ $2\cdot10^{-1}$	☐ $2\cdot10^{-2}$	☐ $2\cdot10^{-3}$	☐ $2\cdot10^{-4}$	☐ $2\cdot10^{-5}$
☐ $5\cdot10^{-1}$	☐ $5\cdot10^{-2}$	☐ $5\cdot10^{-3}$	☐ $5\cdot10^{-4}$	☐ $5\cdot10^{-5}$
☐ $8\cdot10^{-1}$	☐ $8\cdot10^{-2}$	☐ $8\cdot10^{-3}$	☐ $8\cdot10^{-4}$	☐ $8\cdot10^{-5}$

7. (2p)
Vi tillämpar Newton's metod på ett ekvationssystem med hjälp av programmet till höger som endast genomför ett varv. Vi får utskriften:

```
for k=1:1
   F=[x(1)+x(2)^2-3; x(1)^2-x(2)-2]
   J=[1, 2*x(2); 2*x(1),-1]
   x=x-J\F
end
```

```
F =
    -1
     0
J =
     1    -2
     2    -1
x =
    0.6667
   -1.6667
```

Vilken startgissning användes?

Tips: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

☐ $(-2,-3)$	☐ $(-2,-2)$	☐ $(-2,-1)$	☐ $(-2,0)$	☐ $(-2,1)$	☐ $(-2,2)$	☐ $(-2,3)$
☐ $(-1,-3)$	☐ $(-1,-2)$	☐ $(-1,-1)$	☐ $(-1,0)$	☐ $(-1,1)$	☐ $(-1,2)$	☐ $(-1,3)$
☐ $(0,-3)$	☐ $(0,-2)$	☐ $(0,-1)$	☐ $(0,0)$	☐ $(0,1)$	☐ $(0,2)$	☐ $(0,3)$
☐ $(1,-3)$	☐ $(1,-2)$	☒ $(1,-1)$	☐ $(1,0)$	☐ $(1,1)$	☐ $(1,2)$	☐ $(1,3)$
☐ $(2,-3)$	☐ $(2,-2)$	☐ $(2,-1)$	☐ $(2,0)$	☐ $(2,1)$	☐ $(2,2)$	☐ $(2,3)$

8. (2p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} u''(t) &= 2u(t) + v(t) + t^2 \\ v'(t) &= 2u(t) + v(t) + t \end{aligned}$$

med startvärden $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$ och $v(0) = 0$. Skriv om på standardform och genomför ett steg av Euler framåt (för ODE-system) med steglängd $h = 1$. Approximationen av $u'(h)$ blir

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☒ 3	☐ 9	☐ 12	☐ 24	☐ 27	☐ 100
	☐ -1	☐ -2	☐ -3	☐ -9	☐ -12	☐ -24	☐ -27	☐ -100
		☐ $\frac{1}{2}$	☐ $\frac{1}{3}$	☐ $\frac{1}{9}$	☐ $\frac{1}{12}$	☐ $\frac{1}{24}$	☐ $\frac{1}{27}$	☐ $\frac{1}{100}$
		☐ $-\frac{1}{2}$	☐ $-\frac{1}{3}$	☐ $-\frac{1}{9}$	☐ $-\frac{1}{12}$	☐ $-\frac{1}{24}$	☐ $-\frac{1}{27}$	☐ $-\frac{1}{100}$
							☐ Något annat	

9. (2p) Vi vill approximera $\int_0^1 x^2\,dx$ med Simpsons regel (sammansatt). Vi använder 5 intervall och får approximationen

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 9	☐ 12	☐ 24	☐ 27	☐ 100
	☐ -1	☐ -2	☐ -3	☐ -9	☐ -12	☐ -24	☐ -27	☐ -100
		☐ $\frac{1}{2}$	☒ $\frac{1}{3}$	☐ $\frac{1}{9}$	☐ $\frac{1}{12}$	☐ $\frac{1}{24}$	☐ $\frac{1}{27}$	☐ $\frac{1}{100}$
		☐ $-\frac{1}{2}$	☐ $-\frac{1}{3}$	☐ $-\frac{1}{9}$	☐ $-\frac{1}{12}$	☐ $-\frac{1}{24}$	☐ $-\frac{1}{27}$	☐ $-\frac{1}{100}$
							☐ Något annat	