TENTAMEN I GRUNDKURS I NUMERISKA METODER - DEL 2

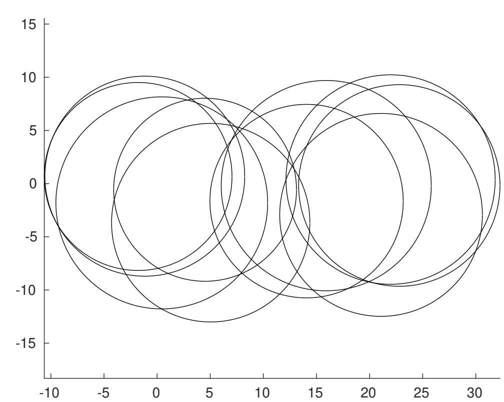
Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgräns (inkl bonuspoäng): 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximal poäng 50 + bonuspoäng (max 4p). Betygen för A och B reduceras med wiki-bonuspoängen (max 1p). Miniräknare är ej tillåten på denna tentamen. Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag. Då algoritmbeskrivning begärs, avses om inte annat anges beskrivning i Matlab. Eftersom miniräknare ej är tillåten är det tillåtet att lämna enkla beräkningsuttryck oförenklade.

OBS: Du får ej använda matlabs inbyggda funktioner för ODE-lösning, integration, derivering, eller funktioner för att hitta nollställe.

Uppgift 1 [17p] Tio cirklar (enligt bilden till höger) definieras av x- och $y-$ positioner för deras centrum och radier som finns i vektornerna `xv`, `yv` och `rv`. Vi ska bestämma den punkt som ligger närmast alla tio cirklar (dvs bäst uppfyller cirkelns ekvation).

(a) Formulera detta som ett olinjärt minstakvadratproblem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{0}$. Definiera $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Det måste tydligt framgå hur många rader vektorn $\mathbf{x}$ har och hur många rader $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ har.

(b) Skriv ett MATLAB eller julia-program som löser detta olinjära minstakvadratproblem. Bestäm startgissning från figuren. Du får anta att vektorerna `xv`, `yv` och `rv` finns tillgängliga. Om du använder dig av backslashoperatorn, ange om den löser ett linjärt minstakvadratproblem eller ej. Skriv en separat funktionsfil som beräknar Jacobianen.



Uppgift 2 [19p] Vi vill tillämpa Euler bakåt på differentialekvationen

$$y'(t) = \beta y(t), \;\; y(0) = \alpha.$$

där $\beta \leq 0$.

(a) Härled en explicit sluten formel för Euler bakåt approximationen av $y(2.0)$ som innehåller N. Antag att vi gör ekvidistant diskretisering med N diskretiseringsintervall och steglängd $h = 2/N$. Räkna exakt för hand.

(b) Ange det relativa felet i punkt $y(2.0)$ som funktion av steglängden. Det måste tydligt framgå hur beror det relativa felet beror på α..

(c) För vilka värden på α och β är Euler framåt stabil när den tillämpas på detta problem?

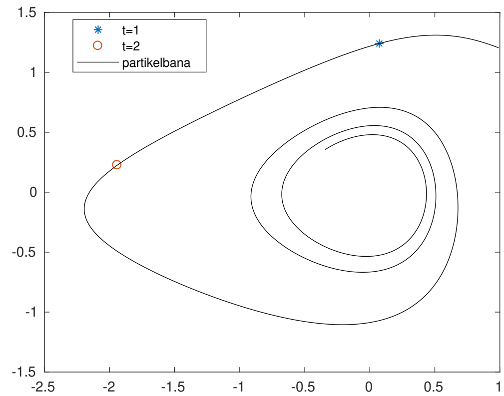
Uppgift 3 [14p]

En partikel rör sig i en bana som bestäms av följande differentialekvation

$$x'(t) = -y(t)e^{-x(t)} - \frac{x(t)^2}{t+2} \quad (1)$$

$$y'(t) = x(t) - \frac{y(t)}{t+2} \quad (2)$$

Banan för intervallet $t = 0$ till $t = 20$ är givet i figuren, där vi dessutom markerat positionerna vid $t = 1$ och $t = 2$.



a) Skriv ett program som löser differentialekvationen för givna startvärden x_0, y_0 och till tidpunkten t genom att skriva denna funktion (MATLAB eller julia):

```
function [tv,xv,yv]=particlesolve(x0,y0,t,alpha,N)
# Beräknar x- och y-positionerna av partikeln tills tidpunkt t när den
# startar i position (x0,y0). Diskretisering med N steg av Euler framåt.
# Vektorerna tv,xv,yv innehåller partikelns x- och y-koordinater vid
# tidpunkter i vektorn tv.
```

b) Som syns i figuren rör sig partikeln nästan som en rät linje mellan tidpunkter $t = 1$ och $t = 2$. Gör en minstakvadratanpassning som anpassar en linje så bra som möjligt för alla diskretiseringspunkter mellan $t = 1$ och $t = 2$ med hjälp av utdata från ett anrop av `particlesolve`. Använd samma startvärden som i figuren.