KTH Matematik

TENTAMEN, DEL 1
Tentamen Maj 2019
SF1547 NUMERISKA METODER
Måndag 27e maj 2019 kl 8.00-11.00

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Markera svaren på dessa papper. Skriv namn och personnummer på varje sida.

Bonus. Skriv bonuspoäng från VT19 här: .... (max=4)
Wiki-Bonus. Wiki-bonuspoäng (endast giltiga för A,B på del 2): ....(max=1)

---

1. (2p) När vi skriver om differentialekvationen

$$\begin{aligned} q'(t) &= q(t) + 2r(t) \\ r''(t) &= 3q(t) + 4r(t) \end{aligned}$$

får vi ODE-systemet

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{bmatrix} \spadesuit & \heartsuit & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \diamondsuit & \clubsuit & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t)$$

Vad blir $(\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit) =$

☐ $(1,2,3,4)$	☐ $(1,3,2,4)$	☐ $(1,1,2,1)$	☐ $(1,2,4,1)$	☐ $(1,2,3,3)$	☐ $(2,2,3,2)$
☐ $(2,2,3,4)$	☐ $(2,3,2,4)$	☐ $(2,1,2,1)$	☐ $(2,2,4,1)$	☐ $(2,2,3,3)$	☐ $(2,2,3,2)$
☐ $(3,2,3,4)$	☐ $(3,3,2,4)$	☐ $(3,1,2,1)$	☐ $(3,2,4,1)$	☐ $(3,2,3,3)$	☐ $(3,2,3,2)$
☐ $(4,2,3,4)$	☐ $(4,3,2,4)$	☐ $(4,1,2,1)$	☐ $(4,2,4,1)$	☐ $(4,2,3,3)$	☐ $(4,2,3,2)$

2. (2p) Ett steg av Euler bakåt med steglängd h tillämpat på begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'(t) &= 3y(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

blir

☐ $(1+3h)y_0$	☐ $(1-3h)y_0$	☐ $(-1-3h)y_0$	☐ $(3h-1)y_0$
☐ $\frac{y_0}{1+3h}$	☐ $\frac{y_0}{1-3h}$	☐ $\frac{y_0}{-1-3h}$	☐ $\frac{y_0}{3h-1}$

3. (2p) Vi använder Newton–ansatsen för att genomföra polynominterpolation med x-värden 1,3,9,10. Vi ställer upp ett ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 48 & 0 \\ 1 & 9 & 63 & 63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ ? \\ ? \\ 9 \end{bmatrix}$$

Vilken funktion interpoleras?

- ☐ $\cos(\pi x) + 2 + x^2$ ☐ $(10-x)/9 + (x-1)$
- ☐ $\cos(\pi x) + 2 + (x-1)^2$ ☐ $(10-x)/9 + (x-2)$
- ☐ $\cos(\pi x) + 2 + (x+1)^2$ ☐ $(10-x)/9 + (x-3)$
- ☐ Inga av de ovanstående

4. (2p) Vi vill lösa följande randvärdesproblem $y''(x) = -2y - 1$ och $y(0) = y(1) = 0$ och skriver följande program med resultatutskrift till höger.

```
a=0; b=1; N=9; h=(b-a)/(N+1);
A=zeros(N,N);
for k=1:N
    A(k,k)=-2+2*h^2;
    if (k<N)
        A(k+1,k)=1;
        A(k,k+1)=1;
    end
end
b=-ones(N,1)*h^2;
y=A\b
```

```
y =
    0.0553
    0.0996
    0.1318
    0.1514
    0.1580
    0.1514
    0.1318
    0.0996
    0.0553
```

Vad är $y''(0.5)$ ungefär enligt denna approximation?

☐ 0	☐ -1	☐ -1.1	☐ -1.01	☐ -2	☐ -0.2	☐ -0.02	☐ -3	☐ -0.3	☐ -0.03
	☐ -3	☐ -1.3	☐ -1.03	☐ -5	☐ -0.5	☐ -0.05	☐ -6	☐ -0.6	☐ -0.06
	☐ -7	☐ -1.7	☐ -1.07	☐ -8	☐ -0.8	☐ -0.08	☐ -9	☐ -0.9	☐ -0.09

5. (2p) Genomför ett steg av sekantmetoden för ekvationen

$$f(x) = x^2 - 1$$

Använd startvärden $x_0 = 0$ och $x_1 = 1$. Efter ett steg får vi $x_2 =$

☐ 0	☐ 1	☐ 0.1	☐ 0.01	☐ 2	☐ 0.2	☐ 0.02	☐ 3	☐ 0.3	☐ 0.03
	☐ 4	☐ 0.4	☐ 0.04	☐ 5	☐ 0.5	☐ 0.05	☐ 6	☐ 0.6	☐ 0.06
	☐ 7	☐ 0.7	☐ 0.07	☐ 8	☐ 0.8	☐ 0.08	☐ 9	☐ 0.9	☐ 0.09

6. (2p) Jag ska resa till skärgården över en helg (60 timmar=60^3 sekunder) och sätter igång en datorsimulation innan jag åker iväg. Jag vill att min simulation är klar när jag kommer hem. Simulationen består av ett linjärt ekvationssystem (utan någon speciell struktur) som jag löser med Gauss-eliminering. På min dator tar det $27 = 3^3$ sekunder att lösa ett problem av storlek $n = 800$. Hur stort är det största ekvationssystemet jag kan lösa? Använd flopcountuppskattning.

☐ 100	☐ 120	☐ 140	☐ 160	☐ 180	☐ 200
☐ 1000	☐ 1200	☐ 1400	☐ 1600	☐ 1800	☐ 2000
☐ 10000	☐ 12000	☐ 14000	☐ 16000	☐ 18000	☐ 20000

7. (3p) Karin vill mäta ett avstånd med hjälp av sin stegräknare som även mäter avstånd. Hon springer först i en riktning, som stegräknaren mäter upp till 8.00 km. Sedan vänder hon och springer i motsatt riktning, enligt stegmätaren 7.95 km, så att man kan tro att hon är 50 meter från ursprungspositionen. Stegmätaren gör 0.2 % fel, dvs relativfel 0.002 för vardera av de två mätningarna. Hur stort är ungefär relativfelet i "svaret" 50 meter?

☐ 0.8	☐ 0.2	☐ 0.02	☐ 0.002	☐ $2 \cdot 10^{-4}$	☐ $2 \cdot 10^{-5}$
☐ 1.6	☐ 0.4	☐ 0.04	☐ 0.004	☐ $4 \cdot 10^{-4}$	☐ $4 \cdot 10^{-5}$
☐ 1.15	☐ 0.65	☐ 0.065	☐ 0.0065	☐ $6.5 \cdot 10^{-4}$	☐ $6.5 \cdot 10^{-5}$
	☐ 0.25	☐ 0.025	☐ 0.0025	☐ $2.5 \cdot 10^{-4}$	☐ $2.5 \cdot 10^{-5}$

8. (2p) Betrakta det ickelinjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + y + 2 \\ 0 &= y + x^2 - 1 \end{aligned}$$

Om vi använder Newtons metod (i flera variabler) med startgissning (1,1) behöver vi lösa det linjära ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} \spadesuit & \heartsuit \\ \diamondsuit & 1 \end{bmatrix} \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 4 \\ \clubsuit \end{bmatrix}$$

där $(\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit) =$

☐ $(1,2,3,4)$	☐ $(1,3,2,4)$	☐ $(1,1,2,1)$	☐ $(1,2,4,1)$	☐ $(1,2,3,3)$	☐ $(2,2,3,2)$
☐ $(2,2,3,4)$	☐ $(2,3,2,4)$	☐ $(2,1,2,1)$	☐ $(2,2,4,1)$	☐ $(2,2,3,3)$	☐ $(2,2,3,2)$
☐ $(3,2,3,4)$	☐ $(3,3,2,4)$	☐ $(3,1,2,1)$	☐ $(3,2,4,1)$	☐ $(3,2,3,3)$	☐ $(3,2,3,2)$
☐ $(4,2,3,4)$	☐ $(4,3,2,4)$	☐ $(4,1,2,1)$	☐ $(4,2,4,1)$	☐ $(4,2,3,3)$	☐ $(4,2,3,2)$

9. (3p) Vi vill beräkna integralen

$$\int_0^3 (1 + x^2)\, dx$$

Vilket påstående stämmer **inte**

- ☐ Simpsons regel har mindre fel än trapetsregeln när h är litet
- ☐ Simpsons regel har mindre fel än trapetsregeln när h är (förhållandevis) stort
- ☐ Om man tillämpar Richardsonextrapolation på trapetsregeln får man samma svar som Simpsons regel
- ☐ Trapetsregeln har noggrannhetsordning två för detta problem
- ☐ Riemannsumma har noggrannhetsordning ett för detta problem
- ☐ Simpsons regel har noggrannhetsordning tre för detta problem