Lösningar till 5B1752 Optimeringslära för E, 19/10–06

Uppgift 1.(a)

Först använder vi Gauss–Jordans metod på den givna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Addition av 1 gånger första raden till andra raden ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Addition av -1 gånger andra raden till första raden, samt addition av 1 gånger andra raden till tredje raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

Nu är $\mathbf{A}$ överförd till trappstegsform med *två trappstegsettor*.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}$ som svarar mot trappstegsettor i $\mathbf{U}$, dvs kolonnerna 1 och 2 i $\mathbf{A}$.

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ kan bestämmas enligt följande:
Sätt $x_3 = 1$ (den enda variabel som inte svarar mot en trappstegsetta)
och bestäm sedan x_1 och x_2 (variablerna svarande mot trappstegsettor)

så att $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$. Det ger den första och enda basvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Fortsättning på nästa sida.

Nu använder vi Gauss–Jordans metod på matrisen

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Addition av -1 gånger första raden till andra raden ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Addition av 1 gånger andra raden till första raden, samt addition av -1 gånger andra raden till tredje raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{U}}.$$

Nu är $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ överförd till trappstegsform med *två trappstegsettor*.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ som svarar mot trappstegsettor i $\tilde{\mathbf{U}}$, dvs kolonnerna 1 och 2 i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ kan bestämmas enligt följande:
Sätt $y_3 = 1$ (den enda variabel som inte svarar mot en trappstegsetta)
och bestäm sedan y_1 och y_2 (variablerna svarande mot trappstegsettor)
så att $\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Det ger den första och enda basvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

Uppgift 1.(b).

Vi får följande tillåtna baslösning mha "North West Corner"-metoden:

x_{ij}	kund1	kund2	kund3	a_i
lev 1	20	10		30
lev 2		10	20	30
b_j	20	20	20	

Svarande mot den tillåtna baslösningen ovan får vi följande simplexmultiplikatorer u_i och v_j, beräknade ur relationen $c_{ij} = u_i - v_j$ för basvariabler samt $v_3 = 0$.

c_{ij}	kund1	kund2	kund3	u_i
lev 1	5	3		1
lev 2		6	4	4
v_j	-4	-2	0	

Därefter får vi följande reducerade kostnader r_{ij} för ickebasvariablerna, uträknade mha relationen $r_{ij} = c_{ij} - u_i + v_j$.

r_{ij}	kund1	kund2	kund3	u_i
lev 1			1	1
lev 2	-1			4
v_j	-4	-2	0	

Eftersom r_{21} är minst, och < 0, ska vi låta x_{21} bli ny basvariabel.

Låt $x_{21} = t$, där t ökar från 0. Då påverkas basvariablernas värden enligt följande:

x_{ij}	kund1	kund2	kund3	a_i
lev 1	$20 - t$	$10 + t$		30
lev 2	t	$10 - t$	20	30
b_j	20	20	20	

Vi ser att t kan öka till högst 10, då basvariabeln x_{22} har gått ner till 0.
I den nya baslösningen är x_{21} basvariabel i stället för x_{22}:

x_{ij}	kund1	kund2	kund3	a_i
lev 1	10	20		30
lev 2	10		20	30
b_j	20	20	20	

Svarande mot denna tillåtna baslösning får vi följande simplexmultiplikatorer u_i och v_j, beräknade ur relationen $c_{ij} = u_i - v_j$ för basvariabler samt $v_3 = 0$.

c_{ij}	kund1	kund2	kund3	u_i
lev 1	5	3		2
lev 2	7		4	4
v_j	-3	-1	0	

Därefter får vi följande reducerade kostnader r_{ij} för ickebasvariablerna, uträknade mha relationen $r_{ij} = c_{ij} - u_i + v_j$.

r_{ij}	kund1	kund2	kund3	u_i
lev 1			0	2
lev 2		1		4
v_j	-3	-1	0	

Eftersom alla $r_{ij} \geq 0$ så är denna baslösning optimal.

Optimalvärdet är $5 \cdot 10 + 3 \cdot 20 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 20 = 260$.

Ickebasvariabeln x_{13} har $r_{13} = 0$, vilket betyder att målfunktionsvärdet inte ändras om vi ökar x_{13} från 0 (och samtidigt ändrar basvariablerna så att bivillkoren förblir uppfyllda).

Låt $x_{13} = t$, där t ökar från 0. Då påverkas basvariablernas värden enligt följande:

x_{ij}	kund1	kund2	kund3	a_i
lev 1	$10 - t$	20	t	30
lev 2	$10 + t$		$20 - t$	30
b_j	20	20	20	

Vi ser att t kan öka till högst 10, då basvariabeln x_{11} har gått ner till 0.
I den nya baslösningen är x_{13} basvariabel i stället för x_{11}:

x_{ij}	kund1	kund2	kund3	a_i
lev 1		20	10	30
lev 2	20		10	30
b_j	20	20	20	

Svarande mot denna tillåtna baslösning får vi följande simplexmultiplikatorer u_i och v_j, beräknade ur relationen $c_{ij} = u_i - v_j$ för basvariabler samt $v_3 = 0$.

c_{ij}	kund1	kund2	kund3	u_i
lev 1		3	2	2
lev 2	7		4	4
v_j	-3	-1	0	

Därefter får vi följande reducerade kostnader r_{ij} för ickebasvariablerna, uträknade mha relationen $r_{ij} = c_{ij} - u_i + v_j$.

r_{ij}	kund1	kund2	kund3	u_i
lev 1	0			2
lev 2		1		4
v_j	-3	-1	0	

Eftersom alla $r_{ij} \geq 0$ så är även denna baslösning optimal.

Optimalvärdet är $3 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 20 + 4 \cdot 10 = 260$, dvs samma som tidigare.

Uppgift 2.(a)

Om vi inför slackvariabler x_5 och x_6, för att överföra olikhetsbivillkoren till likhetsbivillkor, så får vi ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 90 \\ 45 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (-3,\, 4, -2,\, 5,\, 0,\, 0)$.

Startlösningen ska ha basvariablerna x_5 och x_6, dvs $\beta = (5, 6)$ och $\delta = (1, 2, 3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 45 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 45 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (-3,\, 4, -2,\, 5) - (0,\, 0)\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (-3,\, 4, -2,\, 5)$.

Eftersom $r_{\delta_1} = r_1 = -3$ är minst, och < 0, ska vi låta x_1 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_1$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_1 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} \mid \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min\left\{ \frac{90}{1},\, \frac{45}{1} \right\} = \frac{45}{1} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{21}}.$$

Minimerande index är $i = 2$, varför $x_{\beta_2} = x_6$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_1.

Nu är alltså $\beta = (5, 1)$ och $\delta = (6, 2, 3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 45 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (0,\, 4, -2,\, 5) - (0, -3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (3,\, 1,\, 1,\, 2).$

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen optimal.

Därmed är punkten $x_1 = 45$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ optimal till det ursprungliga problemet. Optimalvärdet är $z = -135$.

Uppgift 2.(b)

Antag nu att $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (-3,\, 4, -2,\, 2,\, 0,\, 0)$ i stället för $(-3,\, 4, -2,\, 5,\, 0,\, 0)$.

Om vi startar från slutlösningen ovan, med $\beta = (5, 1)$ och $\delta = (6, 2, 3, 4)$, så gäller fortfarande att

$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Men reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges nu av

$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (0,\, 4, -2,\, 2) - (0, -3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (3,\, 1,\, 1, -1).$

Eftersom $r_{\delta_4} = r_4 = -1$ är minst, och < 0, ska vi låta x_4 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_4$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{a}}_4 = \mathbf{a}_4$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_4 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Eftersom $\bar{\mathbf{a}}_4 \leq \mathbf{0}$ så kan x_4 öka obegränsat, varvid målfunktionsvärdet går mot $-\infty$. Därmed saknar problemet ändligt optimalvärde och algoritmen avbryts.

Extra kommentar (som inte krävs):

Om man sätter $x_4 = t$ och låter t öka från 0, medan de övriga ickebasvariablerna ligger kvar vid 0, så påverkas målfunktionen enligt $z = \bar{z} + r_4 t = -135 - t$, medan basvariablernas värden påverkas enligt $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_4 t$, dvs $\begin{pmatrix} x_5 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} t$.

Detta kan skrivas $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 45 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{d}.$

Då är $\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0}$ för alla $t \geq 0$, dvs $\mathbf{x}(t)$ är en tillåten lösning för varje $t \geq 0$,

medan $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d} = -135 - t \to +\infty$ då $t \to +\infty$.

Uppgift 2.(c)

Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

så är det duala problemet på formen: maximera $\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$, som här blir:

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{maximera} & 90y_1 & + & 45y_2 & & \\ \text{då} & y_1 & + & y_2 & \leq & -3, \\ & y_1 & - & y_2 & \leq & 4, \\ & -y_1 & + & y_2 & \leq & -2, \\ & -y_1 & - & y_2 & \leq & 5, \\ & y_1 & & & \leq & 0, \\ & & & y_2 & \leq & 0. \end{array}$$

Om man ritar upp det tillåtna området till detta problem i en figur med y_1 och y_2 på axlarna så ser man att det blir en femhörning med hörnen i koordinaterna $(-0.5\,,\,-2.5)$, $(\,0\,,\,-3)$, $(\,0\,,\,-4)$, $(-0.5\,,\,-4.5)$ och $(-1.5\,,\,-3.5)$.

Uppgift 2.(d)

I figuren ovan ska vi nu byta ut bivillkoret $-y_1 - y_2 \leq 5$ mot bivillkoret $-y_1 - y_2 \leq 2$.
Men då ser man direkt att det inte finns något $\mathbf{y}$ som uppfyller både $y_1 + y_2 \leq -3$ och $-y_1 - y_2 \leq 2$. (Vilket även inses om man adderar dessa båda olikheter.)
Alltså saknar det duala problemet tillåtna lösningar, vilket är vad vi väntade oss eftersom det primala problemet hade tillåtna lösningar men saknade (ändlig) optimallösning.

Uppgift 3.

Låt $\mathbf{x} = (x_{13},\, x_{14},\, x_{23},\, x_{24})^\mathsf{T} \in I\!R^4$.

Eftersom alla $R_{ij} = 1$ så är effektminimeringsproblemet ekvivalent med QP-problemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{I}\,\mathbf{x} \quad (\,=\text{halva värmeeffekten}) \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \end{array}$$

där $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ -500 \end{pmatrix}$.

Detta QP-problem är i sin tur ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{I}\,\mathbf{x} & - & \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} & & & = & \mathbf{b} \end{array}$$

Ur $\mathbf{I}\,\mathbf{x} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ erhålls att $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$, som insatt i $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ger ekv.systemet $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{b}$.

I vårt fall är $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ -500 \end{pmatrix}$.

Gauss-Jordans metod (eller Gausselimination) tillämpat på ekvationssystemet

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ -500 \end{pmatrix}$ ger lösningen $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 150 \\ -50 \\ -200 \end{pmatrix}$.

Länkströmmarna ges sedan av $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ -50 \\ -200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 150 \\ 150 \\ -50 \end{pmatrix}$,

dvs $x_{13} = 350$, $x_{14} = 150$, $x_{23} = 150$ och $x_{24} = -50$.
Strömmen i länken $(2, 4)$ går alltså från nod 4 till nod 2!

Uppgift 4.(a)

Problemet består i att minimera $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ utan några bivillkor,

där $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 44 \\ -20 \end{pmatrix}$.

En symmetrisk 2×2–matris $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ är positivt definit om och endast om $a > 0$, $c > 0$ och $ac - b^2 > 0$. Detta är uppfyllt för vår matris $\mathbf{H}$, så målfunktionen f är en strikt konvex kvadratisk funktion som därmed har en unik global minimipunkt. Denna minimipunkt erhålls som lösningen till ekvationssystemet $\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$,

dvs $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ 20 \end{pmatrix}$, med lösningen $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Uppgift 4.(b)

Vi har ett kvadratiska optimeringsproblem med linjära olikhetsbivillkor på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 44 \\ -20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vi ska lösa problemet med den metod som finns kortfattat sammanfattad på formelbladet (i form av ett antal "Steg").

I den givna startpunkten $\bar{\mathbf{x}} = (0,\,0)^{\mathsf{T}}$ är bägge bivillkoret uppfyllda med likhet.
Därför startar vi med $\alpha = (1, 2)$ och γ tom.

Då är $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 44 \\ -20 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, och därmed $\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vi får svaret "JA" i Steg 1, ty $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathsf{T}}\bar{\mathbf{u}}$ med $\bar{\mathbf{u}} = (44,\,-20)^{\mathsf{T}}$, så vi går till Steg 2.

Här konstateras att $\bar{u}_2 < 0$ (och minst), varför $\alpha_2 = 2$ flyttas över till γ–vektorn.

Sedan går vi till Steg 3 med $\alpha = (1)$, $\gamma = (2)$ och $\mathbf{A}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

I Steg 3 ska vi minimera $\frac{1}{2}\,\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\mathbf{d} + (\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})^{\mathsf{T}}\mathbf{d}$ under bivillkoret $\mathbf{A}_{\alpha}\mathbf{d} = \mathbf{0}$,

dvs minimera $5d_1^2 - 6d_1d_2 + 5d_2^2 + 44d_1 - 20d_2$ under bivillkoret att $d_1 = 0$.

Insättning av $d_1 = 0$ i målfunktionen leder till att vi ska minimera $5d_2^2 - 20d_2$ med avseende på d_2. Detta enkla envariabelproblem har den optimala lösningen $\hat{d}_2 = 2$.

Vi får alltså att $\hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Eftersom $\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ uppfyller alla bivillkor låter vi denna punkt bli nästa iterationspunkt $\bar{\mathbf{x}}$ och går till Steg 1.

Nu är $\alpha = (1)$, $\gamma = (2)$, $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 32 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vi får svaret "JA" i Steg 1, ty $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathsf{T}}\bar{\mathbf{u}}$ med $\bar{\mathbf{u}} = 32$, så vi går till Steg 2.

Här konstateras att $\bar{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$, varför den aktuella iterationspunkten

$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, tillsammans med vektorn $\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 32 \\ 0 \end{pmatrix}$, uppfyller optimalitetsvillkoren,

dvs $\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$ och $\hat{\mathbf{y}}^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = 0$. Vi stannar därför här.

Uppgift 5.

Problemet kan skrivas på formen: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, \ldots, 6$,

där $f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3$,
$g_1(\mathbf{x}) = x_1 - 11$, $g_2(\mathbf{x}) = x_2 - 7$, $g_3(\mathbf{x}) = x_3 - 13$,
$g_4(\mathbf{x}) = -x_1 - 2$, $g_5(\mathbf{x}) = -x_2 - 3$, $g_6(\mathbf{x}) = -x_3 - 5$.

Lagrangefunktionen kan skrivas $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{6} y_i g_i(\mathbf{x}) =$
$= x_1 x_2 x_3 + y_1(x_1 - 11) + y_2(x_2 - 7) + y_3(x_3 - 13) + y_4(-x_1 - 2) + y_5(-x_2 - 3) + y_6(-x_3 - 5)$.

KKT-villkoren kan delas upp i fyra grupper enligt följande.

(KKT–1) $\partial L/\partial x_j = 0$ för $j = 1, 2, 3$:
$x_2 x_3 + y_1 - y_4 = 0$,
$x_3 x_1 + y_2 - y_5 = 0$,
$x_1 x_2 + y_3 - y_6 = 0$.

(KKT–2) Tillåten punkt: $-2 \leq x_1 \leq 11$, $-3 \leq x_2 \leq 7$, $-5 \leq x_3 \leq 13$.

(KKT–3) Lagrangemultiplikatorerna icke-negativa: $y_i \geq 0$, för $i = 1, \ldots, 6$.

(KKT–4) Komplementaritetsvillkor, dvs $y_i g_i(\mathbf{x}) = 0$ för $i = 1, \ldots, 6$:
$y_1(x_1 - 11) = 0$, $y_2(x_2 - 7) = 0$, $y_3(x_3 - 13) = 0$,
$y_4(-x_1 - 2) = 0$, $y_5(-x_2 - 3) = 0$, $y_6(-x_3 - 5) = 0$.

Vi tar en hörnpunkt i taget och undersöker om det går att uppfylla ovanstående.

$\mathbf{x} = (11, 7, 13)^{\mathsf{T}}$:
Komplementaritetsvillkoren ger att $y_4 = y_5 = y_6 = 0$,
varefter villkoren $\partial L/\partial x_j = 0$ ger att $y_1 = -91$, $y_2 = -143$, $y_3 = -77$.
Detta strider dock mot icke-negativitetskraven på y_i.
Alltså är $\mathbf{x}$ *inte* en KKT-punkt.

$\mathbf{x} = (-2, 7, 13)^{\mathsf{T}}$:
Komplementaritetsvillkoren ger att $y_1 = y_5 = y_6 = 0$,
varefter villkoren $\partial L/\partial x_j = 0$ ger att $y_4 = 91$, $y_2 = 26$, $y_3 = 14$.
Eftersom alla y_i blev icke-negativa är samtliga KKT-villkor uppfyllda.
Alltså är $\mathbf{x}$ en KKT-punkt!

$\mathbf{x} = (11, -3, 13)^{\mathsf{T}}$:
Komplementaritetsvillkoren ger att $y_4 = y_2 = y_6 = 0$,
varefter villkoren $\partial L/\partial x_j = 0$ ger att $y_1 = 39$, $y_5 = 143$, $y_3 = 33$.
Eftersom alla y_i blev icke-negativa är samtliga KKT-villkor uppfyllda.
Alltså är $\mathbf{x}$ en KKT-punkt!

$\mathbf{x} = (11, 7, -5)^{\mathsf{T}}$:
Komplementaritetsvillkoren ger att $y_4 = y_5 = y_3 = 0$,
varefter villkoren $\partial L/\partial x_j = 0$ ger att $y_1 = 35$, $y_2 = 55$, $y_6 = 77$.
Eftersom alla y_i blev icke-negativa är samtliga KKT-villkor uppfyllda.
Alltså är $\mathbf{x}$ en KKT-punkt!

$\mathbf{x} = (11, -3, -5)^\mathsf{T}$:
Komplementaritetsvillkoren ger att $y_4 = y_2 = y_3 = 0$,
varefter villkoren $\partial L/\partial x_j = 0$ ger att $y_1 = -15$, $y_5 = -55$, $y_6 = -33$.
Detta strider dock mot icke-negativitetskraven på y_i.
Alltså är $\mathbf{x}$ *inte* en KKT-punkt.

$\mathbf{x} = (-2, 7, -5)^\mathsf{T}$:
Komplementaritetsvillkoren ger att $y_1 = y_5 = y_3 = 0$,
varefter villkoren $\partial L/\partial x_j = 0$ ger att $y_4 = -35$, $y_2 = -10$, $y_6 = -14$.
Detta strider dock mot icke-negativitetskraven på y_i.
Alltså är $\mathbf{x}$ *inte* en KKT-punkt.

$\mathbf{x} = (-2, -3, 13)^\mathsf{T}$:
Komplementaritetsvillkoren ger att $y_1 = y_2 = y_6 = 0$,
varefter villkoren $\partial L/\partial x_j = 0$ ger att $y_4 = -39$, $y_5 = -26$, $y_3 = -6$.
Detta strider dock mot icke-negativitetskraven på y_i.
Alltså är $\mathbf{x}$ *inte* en KKT-punkt.

$\mathbf{x} = (-2, -3, -5)^\mathsf{T}$:
Komplementaritetsvillkoren ger att $y_1 = y_2 = y_3 = 0$,
varefter villkoren $\partial L/\partial x_j = 0$ ger att $y_4 = 15$, $y_5 = 10$, $y_6 = 6$.
Eftersom alla y_i blev icke-negativa är samtliga KKT-villkor uppfyllda.
Alltså är $\mathbf{x}$ en KKT-punkt!

Precis hälften av hörnpunkterna är alltså KKT-punkter, nämligen de hörnpunkter som har ett udda antal negativa koordinater.

Om $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^\circ$ så ger kompl.villkoren att samtliga Lagrangemultiplikatorer $y_i = 0$,
varefter villkoren $\partial L/\partial x_j = 0$ ger att $x_1 x_2 = x_2 x_3 = x_3 x_1 = 0$.
Detta är uppfyllt om och endast om minst två av de tre variablerna x_j är noll.

KKT-punkterna i $\mathcal{F}^\circ$ består alltså av
dels de punkter på x_1-axeln som uppfyller $-2 < x_1 < 11$,
dels de punkter på x_2-axeln som uppfyller $-3 < x_2 < 7$,
dels de punkter på x_3-axeln som uppfyller $-5 < x_3 < 13$.