

Tentamen i 5B1752 Optimeringslära för E.
Torsdag 19 oktober 2006 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

1. (a) I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas till vart och ett av de fyra fundamentala underrummen till $\mathbf{A}$, dvs till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\top)$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$ (5p)

- (b) Ett balanserat transportproblem med m st leverantörer och n st kunder kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} &\text{minimera} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ &\text{då} && \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \text{för } i = 1, \dots, m \\ &&& \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad \text{för } j = 1, \dots, n \\ &&& x_{ij} \geq 0, \quad \text{för alla } i \text{ och } j \end{aligned}$$

där a_i = tillgången hos leverantör nr i , b_j = efterfrågan hos kund nr j ,
 c_{ij} = transportkostnaden per enhet från leverantör nr i till kund nr j .

Antag att följande data är givna:

$$\begin{aligned} m &= 2, \quad n = 3, \quad a_1 = a_2 = 30, \quad b_1 = b_2 = b_3 = 20, \\ c_{11} &= 5, \quad c_{12} = 3, \quad c_{13} = 2, \quad c_{21} = 7, \quad c_{22} = 6, \quad c_{23} = 4. \end{aligned}$$

Använd en systematisk metod för att bestämma en optimal lösning till problemet. Om det finns fler än en optimal lösning så ska du (för att få full poäng) ange minst två olika optimala lösningar. (5p)

2. Betrakta följande LP-problem:

$$\begin{array}{rcllclcl}
 \text{minimera} & -3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 \\
 \text{då} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \leq & 90, \\
 & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 45, \\
 & x_1 & & & & & & & \geq & 0, \\
 & & & x_2 & & & & & \geq & 0, \\
 & & & & & x_3 & & & \geq & 0, \\
 & & & & & & & x_4 & \geq & 0.
 \end{array}$$

- (a) Överför problemet till standardform med hjälp av två slackvariabler x_5 och x_6 . Använd sedan simplexmetoden för att lösa problemet. Starta med nyssnämnda slackvariabler som basvariabler. (4p)
- (b) Antag att målfunktionskoefficienten framför x_4 ändras från 5 till 2. Använd simplexmetoden på detta modifierade problem. Det är tillåtet att starta i slutlösningen från (a)-uppgiften. Kommentera vad som händer. (3p)
- (c) Formulera det duala LP-problemet svarande mot problemet på standardform (med 6 variabler) från (a)-uppgiften. Åskådliggör det tillåtna området till detta duala problem i en figur med dualvariablerna y_1 och y_2 på axlarna. (2p)
- (d) Hur ser motsvarande figur ut för det duala LP-problemet svarande mot problemet på standardform från (b)-uppgiften? Kommentera figuren. (1p)
3. Denna uppgift handlar om ett litet elektriskt nätverk med resistanser på länkarna. Nätverket har nodmängden $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ (dvs total 4 st noder) och länkmängden $\mathcal{B} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$. (Det går alltså ingen länk mellan noderna 1 och 2 och ingen länk mellan noderna 3 och 4, men i övrigt går det en länk mellan varje nodpar.) Varje länk $(i, j) \in \mathcal{B}$ har en given resistans R_{ij} Ohm.

Antag nu att man utifrån (mha strömkällor) matar in strömmen 500 mA i nod 1 och strömmen 100 mA i nod 2 medan man tar ut strömmen 500 mA från nod 3 och strömmen 100 mA från nod 4. Den totala (värme-)effekten i nätverket ges då av

$$R_{13}x_{13}^2 + R_{14}x_{14}^2 + R_{23}x_{23}^2 + R_{24}x_{24}^2,$$

där x_{ij} = strömmen i länken (i, j) . (Om $x_{ij} > 0$ så går strömmen i länken från nod i till nod j , medan om $x_{ij} < 0$ så går strömmen i länken från nod j till nod i .)

Naturen väljer strömmarna x_{ij} på ett sådant sätt att ovanstående summa minimeras under bivillkor på strömbalanser i de tre första noderna. Strömbalans i den fjärde noden, dvs $-x_{14} - x_{24} = -100$, följer av strömbalanserna i de övriga tre noderna, som för alla balanserade nätverksflödesproblem.

Din uppgift är nu att beräkna länkströmmarna x_{ij} genom att lösa ovannämnda optimeringsproblem som har en konvex kvadratisk målfunktion och linjära likhetsbivillkor. Använd en generell metod för denna typ av kvadratisk optimering.

Du får för enkelhets skull anta att $R_{ij} = 1$ för alla länkar. (10p)

4. Låt den kvadratiske tvåvariabelfunktionen f ges av

$$f(\mathbf{x}) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 44x_1 - 20x_2, \quad \text{för } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Bestäm en optimal lösning till problemet att minimera $f(\mathbf{x})$ utan några bivillkor (förutom att $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$).
 Avgör speciellt om det är en globalt optimal lösning du har erhållit.
 Kända satser får användas utan bevis. (3p)
- (b) Betrakta nu problemet att minimera $f(\mathbf{x})$ under bivillkoren att $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$. Detta problem kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Ange vad $\mathbf{H}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$ och $\mathbf{b}$ är i detta fall.

Lös sedan problemet med den metod som ingår i kursen för denna typ av kvadratisk optimering under linjära olikhetsbivillkor.

Du ska starta i punkten $\mathbf{x} = (0, 0)^\top$ (7p)

5. I denna uppgift behandlas följande icke-linjära optimeringsproblem med tre variabler och sex olikhetsbivillkor:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & x_1x_2x_3 \\ \text{då} \quad & -2 \leq x_1 \leq 11 \\ & -3 \leq x_2 \leq 7 \\ & -5 \leq x_3 \leq 13 \end{aligned}$$

- (a) Det tillåtna området har åtta stycken *hörnpunkter*, dvs punkter där tre av de sex bivillkoren är uppfyllda med likhet.
 Avgör i vilka av dessa som KKT-villkoren (dvs första ordningens optimalitetsvillkor) är uppfyllda. (7p)
- (b) Låt $\mathcal{F}^\circ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -2 < x_1 < 11, -3 < x_2 < 7, -5 < x_3 < 13\}$,
 dvs $\mathcal{F}^\circ = \text{det inre av det tillåtna området}$.
 Avgör om det finns några punkter $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^\circ$ i vilka KKT-villkoren är uppfyllda. Bestäm i så fall samtliga dessa punkter. (3p)

Lycka till!