KTH Matematik

Tentamen i 5B1814 Tillämpad matematisk programmering—linjära problem
Lördagen den 27 augusti 2005 kl. 8.00–13.00
Kortfattade lösningsförslag

1. (a) Ja.
(b) Nej.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Nej.

2. Optimalitetsvillkoren till (DLP_μ) ges av det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} Ax &= b,\\ A^Ty + s &= c,\\ XSe &= \mu e, \end{aligned}$$

där $X = \operatorname{diag}(x)$, $S = \operatorname{diag}(s)$ och $e = (1\ 1\ \dots 1)^T$, samt $x > 0$ och $s > 0$.

Först undersöker vi om $s(1) = (2\ \frac{1}{2}\ 2)^T$ stämmer. Vi har $s(1) > 0$ uppfyllt. Ur $XSe = e$ får vi $x(1) = (\frac{1}{2}\ 2\ \frac{1}{2})^T$, vilket också uppfyller $Ax = b$. Insättning i andra blocket ger att det måste finnas $y(1)$ så att $A^Ty(1) = c - s(1)$, dvs

$$\begin{pmatrix} 2 & 2\\ 4 & 2\\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(1)\\ y_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ -2 \end{pmatrix}. \quad \text{Vi får lösning för} \quad y(1) = \begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi har uppfyllt optimalitetsvillkoren. Alltså är den föreslagna lösningen $s(1)$ korrekt.

Sedan undersöker vi om $y(2) = (-2\ 0)^T$ är korrekt. Då blir $s(2) = c - A^Ts(2) = (6\ \frac{21}{5}\ 0)^T$ enligt andra blocket ekvationer. Men $s_3(2) = 0$ är orimligt, då det inte går att förena med något $x_3(2)$ i ekvationen $XSe = 2e$. Den föreslagna $y(2)$ är därmed inte korrekt.

3. (a) Vi ser att $\widetilde{x}$ har komponenterna 1,3 och 4 positiva. De aktiva bivillkoren i $\widetilde{x}$ blir därför

$$\begin{pmatrix} A\\ e_2^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{där} \quad e_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Om vi nu tar en nollskild vektor p och positiva skalärer β_1 och β_2 följer att $\widetilde{x}$ ligger mellan x^1 och x^2, där $x^1 = \widetilde{x} - \beta_1 p$ och $x^2 = \widetilde{x} + \beta_2 p$. Eftersom $\widetilde{x}$ då ligger mellan x^1 och x^2 kan $\widetilde{x}$ skrivas som en konvexkombination av x^1 och x^2.

Vi har $x^1 = \widetilde{x} - \beta_1 p$ och $x^2 = \widetilde{x} + \beta_2 p$, vilket ger

$$x^1 = \widetilde{x} - \beta_1 p = \widetilde{x} - \frac{\beta_1}{\beta_2}(x^2 - \widetilde{x}) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2}\widetilde{x} - \frac{\beta_1}{\beta_2}x^2.$$

Alltså får vi

$$\widetilde{x} = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}x^1 + \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}x^2.$$

Om x^1 och x^2 är tillåtna måste gälla att

$$\begin{pmatrix} A\\ e_2^T \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3\\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix},$$

eftersom $\widetilde{x}$ är en konvexkombination av x^1 och x^2. Vi ser att $p_2 = 0$ och kan sedan exempelvis välja $p_1 = 1$, vilket ger

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Då blir $\widetilde{x} + \eta p \geq 0$ för $-1 \leq \eta \leq 1$. De begränsande fallen $\eta = -1$ respektive $\eta = 1$ ger tillåtna lösningar med två positiva komponenter,

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 2\\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad x^2 = \begin{pmatrix} 4\\ 0\\ 0\\ 2 \end{pmatrix}.$$

De delmatriser ur A som svarar mot positiva komponenter i dessa lösningar är båda ickesingulära, varför de båda är baslösningar.

Vi har $x^1 = \widetilde{x} - p$ och $x^2 = \widetilde{x} + p$, varför vi med $\beta_1 = 1$ och $\beta_2 = 1$ får

$$\widetilde{x} = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}x^1 + \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}x^2 = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2,$$

med x^1 och x^2 givna ovan.

(b) Vi har $c^Tp = -1 < 0$. Dämed kan inte x^1 vara optimal. För att kontrollera optimalitet av x^2 beräknar vi simplexmultiplikatorer y ur

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{vilket ger} \quad \begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix}.$$

Reducerade kostnaderna ges nu av

$$s = c - A^Ty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Då $s \geq 0$ följer att x^2 blir optimal.

4. (Se kursmaterialet.)

5. (a) Vi kan till exempel lagrangerelaxera för $\widehat{u} = (2\ 0)^T$ ger

$$\begin{array}{lll} \varphi(\widehat{u}) = -4 + \min & -5x_1 - 6x_2 - 9x_3 \\ \text{då} & -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \geq -9, \\ & x \geq 0,\ x \text{ heltalig.} \end{array}$$

Optimala målfunktionsvärdet är -19. Optimallösningen är $\varphi(\widehat{u}) = (0\ 1\ 1)^T$ eller $\varphi(\widehat{u}) = (3\ 0\ 0)^T$.

(Detta val av $\widehat{u}$ är optimalt till det duala problemet.)

(b) Här har $u = (-1\ \ -5)^T$ använts då (IP') skapats. Detta är ingen relaxering då multiplikatorerna inte är ickenegativa. Alltså kan vi inte använda (IP') för att få underskattningar till optimalvärdet till (IP). Vi får alltså ingen ytterligare information ur (IP').

(Optimalvärdet till (IP) är -17, och optimalvärdet till (IP') är -16.)