KTH Matematik

Tentamen i 5B1815 Tillämpad linjär optimering
Onsdagen den 10 januari 2007 kl. 8.00–13.00
Kortfattade lösningsförslag

---

1. (a) Vi kan skriva om problemet som

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m} z_i \\ \text{då} & x_i k + l + z_i \geq y_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & -x_i k - l + z_i \geq -y_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{array}$$

Om vi inför dualvariabler u_i svarande mot bivillkor $x_i k + l + z_i \geq y_i$ och dualvariabler v_i svarande mot bivillkor $-x_i k - l + z_i \geq -y_i$ kan det duala problemet skrivas som

$$(DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{m} y_i(u_i - v_i) \\ \text{då} & \sum_{i=1}^{m} x_i(u_i - v_i) = 0, \\ & \sum_{i=1}^{m} (u_i - v_i) = 0, \\ & u_i + v_i = 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ & u \geq 0, \\ & v \geq 0. \end{array}$$

(b) Använd förslagsvis simplexmetoden för att lösa (DLP) som svarar mot ursprungsproblemet. Basmatrisen får speciell struktur. Bivillkorsmatrisen har två fulla rader och sedan enhetsmatriser. Detta gör att vi kan organisera beräkningarna så att vi bara behöver lösa ekvationer där matrisen har dimension 2×2, oberoende av m. Om vi sedan lägger till någon eller några kolumner löser vi det modifierade problemet (DLP) med simplexmetoden genom att utgå från den tillåtna baslösning som vi fått då vi löst ursprungsproblemet. Den lösningen är ju tillåten till det modifierade problemet.

2. (Se kursmaterialet.)

3. (a) Med $e = (1\ 1\ \dots 1)^T$ kan det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet skrivas

$$\begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

För de givna $x(0.1)$, $y(0.1)$ och $s(0.1)$ får vi alla komponenter i det ickelinjära ekvationssystemet av storleksordning 10^{-4}, vilket innebär att vi har en approximativ lösning. Dessutom är de approximativa $x(0.1)$och $s(0.1)$ positiva.

(b) Vi vet att $x(\mu)$, $y(\mu)$ och $s(\mu)$ konvergerar mot optimallösningar då $\mu \to 0$. Dessutom vet vi i detta fall att optimalllösningarna är heltaliga. Vi har värden för $\mu = 0.1$, och förväntar oss att vi har lösningar som är ungefär av storleksordning 0.1 från optimalitet. Avrundning till heltal bör därför ge optimallösningar. Avrundning ger $x = (1\ 2\ 0\ 0)^T$, $y = (3\ 2)^T$ och $s = (0\ 0\ 3\ 2)^T$. Insättning ger att vi har tillåtna lösningar till respektive problem. Dessutom är $x^T s = 0$, varför vi har optimallösningar.

4. (a) Vi får

$$\begin{array}{rll} \varphi(u) = -6u + & \min & (u-3)x_1 + (u-1)x_2 + 15z \\ & \text{då} & x_1 \leq Kz, \\ & & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad z \in \{0,1\}, \end{array}$$

(b) Med $u^* = 1$ får vi

$$\begin{array}{rll} \varphi(u^*) = -6 + & \min & -2x_1 + 15z \\ & \text{då} & x_1 \leq Kz, \\ & & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad z \in \{0,1\}, \end{array}$$

Genom att dela upp i fallen $z = 0$ och $z = 1$ får vi $x_1(u^*) = 0$ och $z(u^*) = 0$ då $K < 7.5$. Vi får $x_2(u^*)$ godtycklig ickenegativ. Därmed blir $\varphi(u^*) = -6$. Den föreslagna optimallösningen till (MIP) är tillåten till (MIP) med målfunktionsvärde -6. Alltså har vi optimallösningar till respektive problem. Då $x_1(u^*) + x_2(u^*) - 6$ är en subgradient till φ i u^* ser vi att alla skalärer större än eller lika med -6 är subgradienter till φ i u^*.

5. (a) Då $\widetilde{s}$ har komponenter 1, 3 och 5 noll, ger kolumnerna 1, 3 och 5 i A en basmatris B sådan att motsvarande baslösning $\widetilde{x}$ uppfyller $c^T\widetilde{x} = b^T\widetilde{y}$, förutsatt att B blir inverterbar.

Vi får

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vilket är en inverterbar matris. Om vi löser $B\widetilde{x}_B = b$ får vi $\widetilde{x}_B = (3\ \ 0\ \ -1)^T$. Därmed blir baslösningen $\widetilde{x} = (3\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -1)^T$. Då $\widetilde{x} \not\geq 0$ är baslösningen inte tillåten.

(b) Då $\widetilde{x}_B$ har komponent 3 negativ, lönar det sig att släppa bivillkor 3 i $B^T y = c_B$, dvs vi beräknar sökriktningen v ur $B^T v = -e_3$. Då blir $v = (0\ 1\ -1)^T$, vilket ger $A^T v = (0\ 0\ 0\ 1\ -1)^T$. Maximal steglängd ges av maximalt α så att $\widetilde{s} - \alpha A^T v \geq 0$, dvs $\alpha = 1$. Då blir $y = \widetilde{y} + \alpha v = (2\ \ 0\ \ -1)^T$ och $s = \widetilde{s} - \alpha A^T v = (0\ 2\ 0\ 0\ 1)^T$. Kolumn 5 ersätts nu av kolumn 4, vilket ger nya basvariabler x_1, x_3 och x_4. Insättning ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösningen är $x_1 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, vilket är primalt tillåtet. Alltså har vi löst problemet.