KTH Matematik

Tentamen i 5B1815 Tillämpad linjär optimering
Onsdagen den 18 oktober 2006 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

24 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \quad x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

Låt $\widetilde{x} = (1\ 0\ 0\ 2\ 0)^T$. En person vars optimeringskunskaper du är tveksam till, nedan benämnd AF, påstår att $\widetilde{x}$ är en optimal baslösning. AF påstår också att han räknat ut den lösningen med simplexmetoden, och att x_1, x_4 och x_5 är basvariabler i hans optimallösning.

(a) Använd simplexmetoden för att bestämma en optimallösning till (LP). Starta med x_1, x_4 och x_5 som basvariabler. .... (7p)

(b) Avgör vad som är rätt i det som AF påstår. .... (3p)

2. Betrakta linjärprogrammeringsproblemet (LP) givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \quad x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Antag att vi vill lösa (LP) med en primal-dual inrepunktsmetod. Antag vidare att vi initialt väljer $x = (2\ 2\ 2\ 2)^T$, $y = (1\ \ -1)^T$, $s = (3\ 3\ 3\ 3)^T$, samt $\mu = 6$. Här betecknar y och s de duala variablerna, i enlighet med bokens notation.

(a) Ställ upp det linjära ekvationssystem som behöver lösas i första iterationen av den primal-duala inrepunktsmetoden för de givna initialvärdena. Vi minskar inte μ utan tar ett steg mot trajektorian för $\mu = 6$. Ställ först upp den allmänna formen och sätt sedan in explicita numeriska värden i ekvationssystemet. (6p)
Anmärkning: Lösningen till det linjära ekvationssystemet ges av $\Delta x = (-2/9\ \ 8/9\ \ 22/9\ \ 2/3)^T$, $\Delta y = (-5/3\ \ 3)^T$, och $\Delta s = (1/3\ \ -4/3\ \ -11/3\ \ -1)^T$.

(b) Bestäm nästa iterationspunkt på lämpligt sätt givet de numeriska värdena för Δx, Δy och Δs givna i anmärkningen till (2a). Avgör speciellt om den nya punkten blir tillåten till det primala respektive det duala problemet. .... (4p)

3. Låt (P) och (D) definieras av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

(a) Antag att x är en tillåten lösning till (P) och att y, s är en tillåten lösning till (D). Visa att dualitetsgapet för dessa lösningar ges av $x^T s$ och motivera slutsatsen att vi har optimala lösningar till respektive problem om och endast om $x_j \cdot s_j = 0$ för alla j. .... (4p)
(Det får antas känt att om (P) har en optimallösning så har även (D) en optimallösning, och optimalvärdena är lika.)

(b) Visa att om det finns någon optimallösning till (P), så finns det minst en extrempunkt (tillåten baslösning) som är optimal. ....(6p)
(Exempelvis kan representationssatsen utnyttjas utan bevis.)

4. Betrakta ett cutting-stock problem med följande data:

$$W = 60, \quad m = 3, \quad w_1 = 7, \quad w_2 = 9, \quad w_3 = 11, \quad b = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 50 \end{pmatrix}^T.$$

Beteckningarna och frågeställningen är i enlighet med läroboken. Givet är rullar av bredd W. Efterfrågat är rullar av m olika bredder. Rulle i har bredd w_i, $i = 1, \ldots, m$. Efterfrågan för rulle i är b_i rullar, $i = 1, \ldots, m$. Man vill skära W-rullarna så att minimalt antal W-rullar går åt.

Föreslaget är att använda skärmönstren $(6\ 2\ 0)^T$, $(0\ 3\ 3)^T$ och $(1\ 1\ 4)^T$.

(a) Betrakta det LP-relaxerade problemet som svarar mot ovanstående problem. Bestäm en baslösning som svarar mot de tre skärmönstren ovan. Visa att den baslösning du tagit fram är optimal till det LP-relaxerade problemet. Det subproblem som uppstår får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. .... (6p)

Ledning: Följande relation kan vara användbar:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ -8 & 24 & -4 \\ 6 & -18 & 18 \end{pmatrix}.$$

(b) Finns det en optimallösning till det LP-relaxerade problemet där skärmönster $(7\ 0\ 1)^T$ används? .... (2p)

(c) Bestäm en "nästan optimal" lösning till ursprungsproblemet. Ange en gräns för maximal avvikelse från optimalitet. .... (2p)

5. Betrakta det blandade linjära heltalsprogrammeringsproblemet (MIP) givet av

$$(MIP) \quad \begin{array}{ll} \min & -3x_1 - x_2 + 15z \\ \text{då} & x_1 \le Kz, \\ & x_1 + x_2 \le 6, \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad z \in \{0,1\}, \end{array}$$

där K är ett "stort tal" som modellerar en fast kostnad på 15 enheter som uppstår då $x_1 > 0$. Vi antar genomgående att K är "tillräckligt stort", dvs $K \ge 6$.

Du kan genomgående i denna uppgift utnyttja att problemet är litet. Systematiska metoder behöver inte användas.

(a) För $K \ge 6$, lös (MIP) på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. .... (2p)

(b) Betrakta LP-relaxeringen till (MIP), dvs det problem som erhålls då $z \in \{0,1\}$ ersätts med $0 \le z \le 1$. Visa att om x är fixerat, så är det optimalt att välja $z = x_1/K$ i LP-relaxeringen. Använd denna information för att bestämma optimallösningarna till LP-relaxeringen som funktion av K för $K \ge 6$. . . .(4p)

(c) Betrakta följande heuristik för att generera en "bra" tillåten lösning till (MIP): *"Lös LP-relaxeringen. Avrunda sedan z uppåt om $x_1 > 0$"*. Visa att det finns ett värde $\bar{K}$ så att denna heuristik genererar optimallösning till (MIP) om $6 \le K \le \bar{K}$. .... (4p)

Lycka till!