KTH Matematik

# Tentamen i 5B1815 Tillämpad linjär optimering
## Onsdagen den 18 oktober 2006 kl. 8.00–13.00

*Examinator:* Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

*Tillåtna hjälpmedel:* Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

*Lösningsmetoder:* Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

*OBS!* Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

24 poäng ger säkert godkänt.

---

**1.** Betrakta linjärprogrammeringsproblemet $(LP)$ givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \quad x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

Låt $\widetilde{x} = (1\ 0\ 0\ 2\ 0)^T$. En person vars optimeringskunskaper du är tveksam till, nedan benämnd AF, påstår att $\widetilde{x}$ är en optimal baslösning. AF påstår också att han räknat ut den lösningen med simplexmetoden, och att $x_1$, $x_4$ och $x_5$ är basvariabler i hans optimallösning.

(a) Använd simplexmetoden för att bestämma en optimallösning till (LP). Starta med $x_1$, $x_4$ och $x_5$ som basvariabler. .................................... (7p)

(b) Avgör vad som är rätt i det som AF påstår. ............................ (3p)

**2.** Betrakta linjärprogrammeringsproblemet $(LP)$ givet av

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \quad x \geq 0, \end{array}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad c = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Antag att vi vill lösa ($LP$) med en primal-dual inrepunktsmetod. Antag vidare att vi initialt väljer $x = (2\ 2\ 2\ 2)^T$, $y = (1\ \ -1)^T$, $s = (3\ 3\ 3\ 3)^T$, samt $\mu = 6$. Här betecknar $y$ och $s$ de duala variablerna, i enlighet med bokens notation.

(a) Ställ upp det linjära ekvationssystem som behöver lösas i första iterationen av den primal-duala inrepunktsmetoden för de givna initialvärdena. Vi minskar inte $\mu$ utan tar ett steg mot trajektorian för $\mu = 6$. Ställ först upp den allmänna formen och sätt sedan in explicita numeriska värden i ekvationssystemet. (6p)
*Anmärkning:* Lösningen till det linjära ekvationssystemet ges av $\Delta x = (-2/9\ \ 8/9\ \ 22/9\ \ 2/3)^T$, $\Delta y = (-5/3\ \ 3)^T$, och $\Delta s = (1/3\ \ -4/3\ \ -11/3\ \ -1)^T$.

(b) Bestäm nästa iterationspunkt på lämpligt sätt givet de numeriska värdena för $\Delta x$, $\Delta y$ och $\Delta s$ givna i anmärkningen till (2a). Avgör speciellt om den nya punkten blir tillåten till det primala respektive det duala problemet. .... (4p)

**3.** Låt ($P$) och ($D$) definieras av

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

(a) Antag att $x$ är en tillåten lösning till ($P$) och att $y, s$ är en tillåten lösning till ($D$). Visa att dualitetsgapet för dessa lösningar ges av $x^T s$ och motivera slutsatsen att vi har optimala lösningar till respektive problem om och endast om $x_j \cdot s_j = 0$ för alla $j$. .................................................. (4p)
(Det får antas känt att om ($P$) har en optimallösning så har även ($D$) en optimallösning, och optimalvärdena är lika.)

(b) Visa att om det finns någon optimallösning till ($P$), så finns det minst en extrempunkt (tillåten baslösning) som är optimal. ........................ (6p)
(Exempelvis kan representationssatsen utnyttjas utan bevis.)

**4.** Betrakta ett cutting-stock problem med följande data:

$$W = 60, \quad m = 3, \quad w_1 = 7, \quad w_2 = 9, \quad w_3 = 11, \quad b = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 50 \end{pmatrix}^T.$$

Beteckningarna och frågeställningen är i enlighet med läroboken. Givet är rullar av bredd $W$. Efterfrågat är rullar av $m$ olika bredder. Rulle $i$ har bredd $w_i$, $i = 1, \ldots, m$. Efterfrågan för rulle $i$ är $b_i$ rullar, $i = 1, \ldots, m$. Man vill skära $W$-rullarna så att minimalt antal $W$-rullar går åt.

Föreslaget är att använda skärmönstren $(6\ 2\ 0)^T$, $(0\ 3\ 3)^T$ och $(1\ 1\ 4)^T$.

(a) Betrakta det LP-relaxerade problemet som svarar mot ovanstående problem. Bestäm en baslösning som svarar mot de tre skärmönstren ovan. Visa att den baslösning du tagit fram är optimal till det LP-relaxerade problemet. Det subproblem som uppstår får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. ..................................................................... (6p)

*Ledning:* Följande relation kan vara användbar:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ -8 & 24 & -4 \\ 6 & -18 & 18 \end{pmatrix}.$$

(b) Finns det en optimallösning till det LP-relaxerade problemet där skärmönster $(7\ 0\ 1)^T$ används? .................................................. (2p)

(c) Bestäm en "nästan optimal" lösning till ursprungsproblemet. Ange en gräns för maximal avvikelse från optimalitet. .................................... (2p)

**5.** Betrakta det blandade linjära heltalsprogrammeringsproblemet $(MIP)$ givet av

$$(MIP) \qquad \begin{array}{ll} \min & -3x_1 - x_2 + 15z \\ \text{då} & x_1 \le Kz, \\ & x_1 + x_2 \le 6, \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad z \in \{0,1\}, \end{array}$$

där $K$ är ett "stort tal" som modellerar en fast kostnad på 15 enheter som uppstår då $x_1 > 0$. Vi antar genomgående att $K$ är "tillräckligt stort", dvs $K \ge 6$.

Du kan genomgående i denna uppgift utnyttja att problemet är litet. Systematiska metoder behöver inte användas.

(a) För $K \ge 6$, lös $(MIP)$ på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. .................................................................. (2p)

(b) Betrakta LP-relaxeringen till $(MIP)$, dvs det problem som erhålls då $z \in \{0,1\}$ ersätts med $0 \le z \le 1$. Visa att om $x$ är fixerat, så är det optimalt att välja $z = x_1/K$ i LP-relaxeringen. Använd denna information för att bestämma optimallösningarna till LP-relaxeringen som funktion av $K$ för $K \ge 6$. ...(4p)

(c) Betrakta följande heuristik för att generera en "bra" tillåten lösning till $(MIP)$: *"Lös LP-relaxeringen. Avrunda sedan $z$ uppåt om $x_1 > 0$"*. Visa att det finns ett värde $\bar{K}$ så att denna heuristik genererar optimallösning till $(MIP)$ om $6 \le K \le \bar{K}$. ......................................................... (4p)

*Lycka till!*