KTH Matematik

5B1815 Tillämpad linjär optimering 2006/2007

Teorifrågor

En av nedanstående åtta teoriuppgifter kommer att ges på tentan. Den valda uppgiften kommer att vara värd 10 poäng. Totalpoängen på tentan är 50.
Observera att du på tentamen måste motivera dina slutsatser ordentligt. Det ska framgå att du förstår vad du gör. Full poäng kräver ett korrekt resonemang utan logiska eller formella brister.
Eventuella satser som behövs som hjälpresultat i bevisen får användas utan att dessa bevisas.

1. Betrakta LP-problemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

där A är en given $m \times n$-matris med linjärt oberoende rader. Låt $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$.

(a) Definiera vad en konvex mängd är.

(b) Visa att S är en konvex mängd.

(c) Definiera vad som menas med en tillåten baslösning till (P).

(d) Visa att x är en extrempunkt till S om och endast om x är en tillåten baslösning till (P).

(Nash och Sofer, avsnitt 4.2–4.3.)

2. Låt $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$. Antag att S har extrempunkter v_i, $i = 1, \ldots, k$. Visa att det då gäller att

$$\begin{aligned} S &= \left\{ x : x = d + \sum_{i=1}^{k} v_i \alpha_i,\ Ad = 0,\ d \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x : x = d + V\alpha,\ Ad = 0,\ d \geq 0,\ e^T\alpha = 1,\ \alpha \geq 0 \right\}, \end{aligned}$$

där $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$ och $e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$.

(Representationssatsen, Nash och Sofer, sid. 88–90.)

3. Låt (P) och (D) definieras av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

(a) Antag att x är en tillåten lösning till (P) och att y, s är en tillåten lösning till (D). Visa att dualitetsgapet för dessa lösningar ges av $x^T s$ och motivera slutsatsen att vi har optimala lösningar till respektive problem om och endast om $x_j \cdot s_j = 0$ för alla j.

(Det får antas känt att om (P) har en optimallösning så har även (D) en optimallösning, och optimalvärdena är lika.)

(b) Visa att om det finns någon optimallösning till (P), så finns det minst en extrempunkt (tillåten baslösning) som är optimal.

(Exempelvis kan representationssatsen utnyttjas utan bevis.)

(Nash och Sofer, avsnitt 4.4 och 6.2.1.)

4. Låt (P) och (D) definieras av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Betrakta, för en fix positiv barriärparameter μ, det primal-duala ekvationssystemet

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s &= c, \\ XSe &= \mu e, \end{aligned}$$

där vi dessutom implicit kräver $x > 0$ och $s > 0$. Här är $X = \operatorname{diag}(x)$, $S = \operatorname{diag}(s)$ och e är en n-vektor med alla komponenter ett.

(a) Antag att $x(\mu)$, $y(\mu)$ och $s(\mu)$ löser det primal-duala ekvationssystemet för ett givet positivt μ samt att $x(\mu) > 0$ och $s(\mu) > 0$. Visa att $x(\mu)$ är tillåten till (P) samt $y(\mu), s(\mu)$ är tillåtna till (D) med dualitetsgap $n\mu$.

(b) Härled det linjära ekvationssystem som uppstår då det primal-duala ekvationssystemet ska lösas med Newtons metod.

(c) Hur hanteras de implicita kraven $x > 0$ och $s > 0$ i en Newton-baserad inrepunktsmetod som approximativt löser det primal-duala ekvationssystemet för avtagande värden på μ?

(Nash och Sofer, avsnitt 9.6 och 17.4.)

5. Givet ett linjärprogrammeringsproblem på formen

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{då} & A_H x = b_H, & A_H \text{ är "komplicerande", dimension } m \times n, \\ & A_E x = b_E, & A_E \text{ är "lätt"}, \\ & x \geq 0. & \end{array}$$

Antag att $\{x : A_E x = b_E, x \geq 0\}$ är begränsad med extrempunkter v_i, $i = 1, \ldots, k$. Antag vidare att problemet ska lösas med Dantzig-Wolfe dekomposition.

Masterproblemet blir då

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^T V\alpha \\
\text{då} & A_H V\alpha = b_H, \\
& e^T\alpha = 1, \\
& \alpha \geq 0.
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{i=1}^k c^T v_i \alpha_i \\
\text{då} & \sum_{i=1}^k A_H v_i \alpha_i = b_H, \\
& \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \\
& \alpha \geq 0.
\end{array}
$$

Här betecknar e en k-dimnensionell vektor med alla komponenter ett, och $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$.

Härled subproblemet som ett LP-problem.

(Nash och Sofer, avsnitt 7.5.)

6. Betrakta det stokastiska programmeringsproblemet (P) givet av

$$
(P) \quad
\begin{array}{ll}
\min & c^T x \\
\text{då} & Ax = b, \\
& T(\omega)x = h(\omega), \\
& x \geq 0,
\end{array}
$$

där ω är en stokastisk variabel och $T(\omega)x = h(\omega)$ endast ska ses som ett "informellt" stokastiskt bivillkor. Antag att ω antar ett ändligt antal värden $\omega_1, \ldots, \omega_N$ med motsvarande sannolikheter $p_1, \ldots, p_N$. Låt T_i beteckna $T(\omega_i)$ och låt h_i beteckna $h(\omega_i)$.

(a) Förklara hur det deterministiskt ekvivalenta problemet

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^T x + \displaystyle\sum_{i=1}^N p_i q_i^T y_i \\
\text{då} & Ax = b, \\
& T_i x + W y_i = h_i, \quad i = 1, \ldots, N, \\
& x \geq 0, \\
& y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, N,
\end{array}
$$

uppstår. (Vi antar här för enkelhets skull "fix kompensation", d.v.s. att W inte beror av i.)

(b) Förklara vad *VSS* är i termer av lämpliga optimeringsproblem.

(c) Förklara vad *EVPI* är i termer av lämpliga optimeringsproblem.

(Kompletteringsbunten. Birge och Louveaux.)

7. Betrakta heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat av

$$
(IP) \quad
\begin{array}{ll}
\min & c^T x \\
\text{då} & Ax \geq b, \\
& Cx \geq d, \\
& x \geq 0, \quad \text{heltal.}
\end{array}
$$

Låt z_{IP} beteckna optimala målfunktionsvärdet till (IP).

Till (IP) kan vi definiera det duala problemet (D) enligt

$$(D) \qquad \begin{array}{ll} \max & \varphi(u) \\ \text{då} & u \geq 0, \end{array}$$

där $\varphi(u) = \min\{c^T x + u^T(b - Ax) : Cx \geq d, x \geq 0 \text{ heltal}\}$. Låt z_D beteckna optimala målfunktionsvärdet till (D).

Låt (LP) beteckna det linjärprogrammeringsproblem vi får ur (IP) om heltalskravet relaxeras, d.v.s.

$$(LP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & Cx \geq d, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Låt z_{LP} beteckna optimala målfunktionsvärdet till (LP).

Visa att $z_{IP} \geq z_D \geq z_{LP}$.
(Kompletteringsbunten. Fisher, artikel i Interfaces, sid. 13.)

8. Betrakta heltalsprogrammeringsproblemet (IP) definierat av

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \quad \text{heltal.} \end{array}$$

Antag att $\bar{x}$ är en tillåten lösning till (IP). Låt (LP) beteckna det LP-relaxerade problemet och (DLP) dess dual, dvs

$$(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (DLP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Antag att man löst (LP) och fått optimallösning $\widetilde{x}$ samt tillhörande dual optimallösning $\widetilde{y}$ och $\widetilde{s}$.

För ett givet $u \in I\!R^n$, låt (LP_u) och dess dual (DLP_u) vara problemen

$$(LP_u) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq u, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (DLP_u) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y + u^T s \\ \text{då} & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Låt $f(u)$ beteckna optimalvärdet till (LP_u) och (DLP_u).

(a) Låt u_j vara en skalär och e_j den $j$te enhetsvektorn av dimension n. Visa att för varje u_j sådant att $(LP_{u_j e_j})$ och $(DLP_{u_j e_j})$ har tillåtna lösningar, gäller att $f(u_j e_j) \geq f(0) + \widetilde{s}_j u_j$,

(b) Använd (8a) för att visa att om $c^T \bar{x} < c^T \widetilde{x} + \widetilde{s}_j$ så är $x_j = 0$ i varje optimallösning till (IP).

(c) Hur skulle resultatet från (8b) kunna användas vid trädsökning om LP-relaxering används i noderna?

Anmärkning: Varje deluppgift kan utföras utan att de tidigare visats.

Bevisskiss till uppgift 8 (som ej kommer att finnas på tentan):
(Vi låter ”optval” beteckna optimalvärde av ett visst problem.)

(a) Tillåtna området till (DLP_u) är oberoende av u. Alltså är $\widetilde{y}$, $\widetilde{s}$ tillåtna till $(DLP_{u_j e_j})$ med målfunktionsvärde $b^T\widetilde{y} + u_j\widetilde{s}_j$. Eftersom $f(u_j e_j)$ är optimalvärdet till $(LP_{u_j e_j})$ och $(DLP_{u_j e_j})$ följer att $f(u_j e_j) \geq b^T\widetilde{y} + u_j\widetilde{s}_j$.

(b) Antag att bivillkoret $x_j \geq 1$ läggs till (IP), och kalla detta nya IP-problem (IP_{e_j}). Då ges LP-relaxeringen av (LP_{e_j}) (dvs u_j är satt till ett). Därmed får vi optval$(IP_{e_j}) \geq f(u_j e_j) \geq c^T\widetilde{x} + \widetilde{s}_j$. Om $c^T\bar{x} < c^T\widetilde{x} + \widetilde{s}_j$ betyder det att optval$(IP_{e_j}) >$ optval(IP). Därmed måste $x_j = 0$ i varje optimallösning till (IP).

(c) Antag att man löser ett IP-problem med trädsökning och LP-relaxering i noderna. Antag att man har en känd lösning $\bar{x}$ till ursprungsproblemet samt i en viss nod en lösning $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ och $\widetilde{s}$ till det LP-relaxerade problemet som svarar mot nodens problem. Då kan man i nodens IP-problem låsa variabler x_j till noll för j sådana att $c^T\bar{x} < c^T\widetilde{x} + \widetilde{s}_j$. (Det kanske inte finns några sådana j.)