KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Tisdagen den 20 augusti 2002 kl. 8.00–13.00.

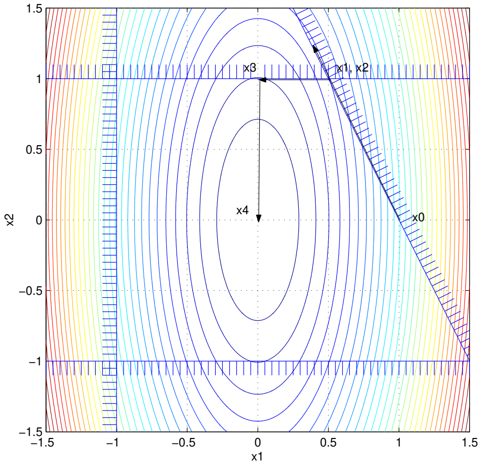
Kortfattade lösningsförslag.

---

1. (a) Nej.
(b) Ja.
(c) Ja.
(d) Nej.
(e) Nej.

2. (Se kursmaterialet.)

3. Iterationerna kan illustreras i nedanstående figur,



I startpunkten x^0 är bivillkor 1 aktivt och det ska hållas aktivt i första iterationen. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen längs detta bivillkor. Steglängden begränsas av bivillkor 3, vilket ger x^1. Därmed blir bivillkor 1 och 3 aktiva.

I x^1 ges sökriktningen till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 1 och 3 aktiva. Denna sökriktning är nollvektorn, och därmed blir steglängden ett accepterad samt $x^2 = x^1$.

I x^2 har vi bivillkor 1 och 3 aktiva. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 1 har negativ lagrangemultiplikator, varför detta villkor släpps. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen med bivillkor 3 aktivt. Steglängden ett är tillåtet, vilket ger x^3.

I x^3 har vi bivillkor 3 aktivt. Då steglängden var ett, ska multiplikatorerna evalueras. Bivillkor 3 har negativ lagrangemultiplikator, varför detta bivillkor släpps. Sökriktningen ges till minpunkten av den kvadratiska målfunktionen utan aktiva bivillkor. Steglängden ett är tillåtet, vilket ger x^4. Då inga aktiva bivillkor finns har vi hittat optimum.

(Om man räknar ut numeriska värden, får man $p^0 = (-\frac{3}{5}\ -\frac{6}{5})^T$, $\alpha^0 = \frac{5}{6}$, $x^1 = (\frac{1}{2}\ 1)^T$, $p^1 = (0\ 0)^T$, $\alpha^1 = 1$, $x^2 = (\frac{1}{2}\ 1)^T$, $\lambda_1^2 = -3$, $\lambda_3^2 = 1$, $p^2 = (-\frac{1}{2}\ 0)^T$, $\alpha^2 = 1$, $x^3 = (0\ 1)^T$, $\lambda_3^3 = -2$, $p^3 = (0\ -1)^T$, $\alpha^3 = 1$, $x^4 = (0\ 0)^T$.)

4. Vi har

$$f(x) = \frac{1}{2}(x_1-2)^2 + \frac{1}{2}(x_2-3)^2, \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1-2 \\ x_2-3 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2, \quad \nabla g(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Insättning ger första QP-problemet enligt

$$\begin{array}{ll} \min & p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 - 2p_2 \\ \text{då} & -p_2 \geq 0. \end{array}$$

Lösningen ges av $p = (1\ 0)^T$, $\lambda = 2$. I uppgiften krävs ingen linjesökning, så vi väljer steglängden ett. Därmed får vi $x^1 = (1\ 1)^T$ och $\lambda^1 = 2$.

5. Derivering ger

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(x_1-1) & -x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Speciellt för x^* får vi

$$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A(x^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^*,\lambda^*) = \begin{pmatrix} \lambda_2^* & 0 \\ 0 & \lambda_2^* \end{pmatrix}.$$

(a) Båda bivillkoren är aktiva i x^*, och första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor kräver $\lambda^* \in I\!R^2$ så att $\lambda^* \geq 0$ och

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{pmatrix}.$$

Vi ser att lösning finns då $\lambda_1^* \geq 0$, $\lambda_2^* \geq 0$ och $\lambda_1^* + \lambda_2^* = 1$.

(b) Vi vet från ovan vilka krav som gäller för att första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor ska gälla. Vi ser dessutom att om $\lambda_2^* > 0$ blir $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) \succ 0$. Därmed blir andra ordningens tillräckliga optimalitetsvillkor uppfyllda. Om $\lambda_2^* = 0$ blir $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$. Eftersom $Z_+(x^*) = (0\ 1)^T$ blir andra ordningens tillräckliga optimalitetsvillkor inte uppfyllda.

Andra ordningens tillräckliga optimalitetsvillkor är alltså uppfyllda for $\lambda^* \in I\!R^2$ sådana att $\lambda_1^* \geq 0$, $\lambda_2^* > 0$ och $\lambda_1^* + \lambda_2^* = 1$.

(c) Då vi har andra ordningens tillräckliga optimalitetsvillkor uppfyllda för något λ^* har vi en lokal minpunkt.