KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Tisdagen den 9 mars 2004 kl. 14.00–19.00
Kortfattade lösningsförslag

1. (a) Ja.
(b) Nej.
(c) Ja.
(d) Ja.
(e) Ja.

2. Eftersom $H \succ 0$ har vi ett konvext problem. Vi startar med $x^{(0)} = (0 \;\; 1 \;\; 0)^T$ och $\mathcal{W}^{(0)} = \{1,3\}$. Sökriktning $p^{(0)}$ och multiplikator $\lambda^{(1)}$ ges av

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ p_3^{(0)} \\ -\lambda_1^{(1)} \\ -\lambda_3^{(1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs $p^{(0)} = (0\;0\;0)^T$, $\lambda_1^{(1)} = 4$ och $\lambda_3^{(1)} = -7$. Då $p^{(1)} = 0$ får vi $x^{(1)} = x^{(0)} = (0 \;\; 1 \;\; 0)^T$. Eftersom $\lambda_3^{(1)} < 0$ släpper vi bivillkor 3 och låter $\mathcal{W}^{(1)} = \{1\}$. Då ges sökriktning $p^{(1)}$ och multiplikatorer $\lambda^{(2)}$ ur

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_3^{(1)} \\ -\lambda_1^{(2)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs $p^{(1)} = (0 \;\; -1 \;\; 4)^T$ och $\lambda_1^{(2)} = -2$.

Maximal steglängd är $1/2$, där bivillkor 6 blir aktivt. Alltså blir nya iterationspunkten $x^{(2)} = (0 \;\; 1/2 \;\; 2)^T$ med $\mathcal{W}^{(2)} = \{1,6\}$. Sökriktning $p^{(2)}$ och multiplikator $\lambda^{(3)}$ ges av

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \\ p_3^{(2)} \\ -\lambda_1^{(3)} \\ -\lambda_6^{(3)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs $p^{(2)} = (0\;\;0\;\;0)^T$, $\lambda_1^{(3)} = 1$ och $\lambda_6^{(3)} = 7/2$. Då $p^{(2)} = 0$ och $\lambda^{(3)} \geq 0$ har vi löst problemet. Optimallösningen är $x^{(2)} = (0 \;\; 1/2 \;\; 2)^T$.

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Vi har $H \succ 0$, varför (QP) är ett konvext problem. Den allmänna formen för det primal-duala ekvationssystemet kan skrivas

$$\begin{aligned} Hx - A^T\lambda &= -c, \\ (Ax-b)_i\lambda_i &= \mu, \quad i = 1,\ldots,m. \end{aligned}$$

Dessutom krävs $Ax > b$ och $\lambda > 0$. Vi låter $\tilde{x}$ och $\tilde{\lambda}$ beteckna de givna approximationerna av $x(0.01)$ och $\lambda(0.01)$. Om vi låter $\mu = 0.01$ och sätter in de föreslagna approximationerna får vi

$$H\tilde{x} + c + A^T\tilde{\lambda} = 10^{-4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\tilde{x} - b = \begin{pmatrix} 0.0050 \\ 0.0096 \\ 0.9995 \\ 1.9959 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (A\tilde{x}-b)_1\tilde{\lambda}_1 - 0.01 \\ (A\tilde{x}-b)_2\tilde{\lambda}_2 - 0.01 \\ (A\tilde{x}-b)_3\tilde{\lambda}_3 - 0.01 \\ (A\tilde{x}-b)_4\tilde{\lambda}_4 - 0.01 \end{pmatrix} \approx 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Vi ser att $A\tilde{x} > b$. Dessutom gäller $\tilde{\lambda} > 0$. Vi ser att de ickelinjära ekvationerna har en residual av storleksordning 10^{-4}, vilket stämmer väl med noggrannheten hos $\tilde{x}$ och $\tilde{\lambda}$.

(b) Ur $A\tilde{x} - b$ ser vi att residualerna för bivillkor 1 och 2 är små, av samma storleksordning som μ. Då vi vet att $x(\mu)$ konvergerar mot en optmallösning då μ går mot noll predikterar vi därför att bivillkor 1 och 2 är aktiva i optimum.

(c) Optimalitetsvillkoren för bivillkor 1 och 2 aktiva blir

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Från ledningen gissar vi att vi får optimallösning x^* till (QP) och multiplikatorvektor λ^* genom avrundning av $\tilde{x}$ och $\tilde{\lambda}$, dvs $x^* = (0 \;\; 1 \;\; 2)^T$ och $\lambda^* = (2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)^T$. Det stämmer också att x^* tillsammans med λ_1^* och λ_2^* uppfyller det linjära ekvationssystemet ovan. Dessutom gäller $Ax^* \geq b$, $\lambda^* \geq 0$ och $(Ax^* - b)_i\lambda_i^* = 0$, $i = 1,\ldots,4$. Alltså är x^* global optimallösning till (QP).

5. (a) Då (NLP) har olikhetsbivillkor måste det gälla att $\lambda^{(1)} \geq 0$. Därför kan inte det föreslagna $\lambda^{(1)}$ vara korrekt.

(b) Det intiala QP-subproblemet får formen

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p^T\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)})p + \nabla f(x^{(0)})^T p \\ \text{då} & \nabla g_i(x^{(0)})^T p \geq -g_i(x^{(0)}), \quad i = 1, \dots, 4. \end{array}$$

Med insatta värden blir det

$$\begin{array}{ll} \min & p_1^2 + p_2^2 + p_1 \\ \text{då} & p_1 + p_2 \geq -1, \\ & p_2 \geq -2, \\ & p_1 \geq 0, \\ & 2p_1 - p_2 \geq -3. \end{array}$$

Optimallösningen till QP-subproblemet kan exempelvis fås ur figur, $p^{(0)} = (0\ 0)^T$. Motsvarande lagrangemultiplikatorvektor är $\lambda^{(1)} = (0\ 0\ 1\ 0)^T$. Då $p^{(0)} = (0\ 0)^T$ får vi $x^{(1)} = x^{(0)} = (0\ 0)^T$, och vi har löst (NLP). Optimallösningen är $x^* = (0\ 0)^T$ och lagrangemultiplikatorvektorn är $\lambda^* = (0\ 0\ 1\ 0)^T$.

(c) Det beräknade x^* uppfyller tillsammans med λ_3^* första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor för problemet

$$(NLP') \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_3(x) \geq 0, \\ & x \in I\!R^2. \end{array}$$

Eftersom f och $-g_3$ är konvexa funktioner på $I\!R^2$ är (NLP') ett konvext optimeringsproblem. Därmed blir x^* globalt optimal till (NLP'). Men då blir x^* också globalt optimal till (NLP). Vi har fått (NLP') ur (NLP) genom att bortse från bivillkor som inte är aktiva i x^*. (Det vill säga att (NLP') är en konvex relaxering av (NLP).)