KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Tisdagen den 17 augusti 2004 kl. 8.00–13.00
Kortfattade lösningsförslag

---

1. (a) Nej.

(b) Ja.

(c) Ja.

(d) Ja.

(e) Ja.

2. (a) Funktionen $f(y) = y_+^2$ har derivata $f'(y) = 0$ för $y < 0$ och $f'(y) = 2y$ för $y > 0$. Alltså är $f'(y)$ kontinuerlig med $f'(0) = 0$. Andraderivatan ges av $f''(y) = 0$ för $y < 0$ och $f''(y) = 2$ för $y > 0$. Alltså är f'' diskontinuerlig i $y = 0$. Följaktligen får målfunktionen diskontinuerlig Hessian i punkter där $p_i^T x = u_i$ för något $i \in \mathcal{U}$ eller $p_i^T x = l_i$ för något $i \in \mathcal{L}$.

(b) Vi kan lösa (QP) genom att först minimera över y för fixerat x, och sedan minimera över x. Vi vill visa att om vi fixerar x i (QP) är det för detta x optimalt att låta $y_i = (p_i^T x - u_i)_+$, $i \in \mathcal{U}$, och $y_i = (l_i - p_i^T x)_+$, $i \in \mathcal{L}$. Om vi sätter in detta optimala val av y i (QP) får vi (P). Därmed blir (P) och (QP) ekvivalenta.

Fixera alltså x i (QP). Då kan minimering av y_i ske oberoende för varje i. För $i \in \mathcal{U}$ får vi

$$\begin{array}{ll} \min & y_i^2 \\ \text{då} & y_i \geq p_i^T x - u_i. \end{array}$$

Om $p_i^T x - u_i < 0$ är det optimalt att välja $y_i = 0$, och om $p_i^T x - u_i \geq 0$ är det optimalt att låta $y_i = p_i^T x - u_i$. Alltså är det optimalt att välja $y_i = (p_i^T x - u_i)_+$, $i \in \mathcal{U}$, vilket vi ville visa. Argumentet för $i \in \mathcal{L}$ är analogt.

3. (Se kursmaterialet.)

4. (a) Hessianen H har positiva diagonalelement, och är dessutom (svagt) diagonaldominant. Alltså är den positivt semidefinit. Ett kvadratiskt programmeringsproblem med positivt semidefinit Hessian är ett konvext problem.

Alternativt kan vi göra en Choleskyfaktorisering av H, vilket visar att H är positivt definit.

(b) I $\widetilde{x}$ är bivillkor 2, 3 och 4 aktiva. För att $\widetilde{x}$ ska vara en optimallösning måste det finnas ickenegativa lagrangemultiplikatorer $\tilde{\lambda}_2$, $\tilde{\lambda}_3$ och $\tilde{\lambda}_4$ så att $H\widetilde{x}+c = A_A^T\tilde{\lambda}_A$. Ekvationssystemet blir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_2 \\ \tilde{\lambda}_3 \\ \tilde{\lambda}_4 \end{pmatrix},$$

vilket har unik lösning $\tilde{\lambda}_2 = 1$, $\tilde{\lambda}_3 = -1$ och $\tilde{\lambda}_4 = 0$. Då $\tilde{\lambda}_3 < 0$ är första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor inte uppfyllda, och därmed är $\widetilde{x}$ inte en optimallösning.

(c) Vi kan se ovanstående som en första iteration i en active-set metod. Då $\tilde{\lambda}_3 < 0$ släpper vi på bivillkor 3 och får $x^{(1)} = (1 \;\; 0 \;\; 0)^T$ och $\mathcal{W}^{(1)} = \{2, 4\}$. Sökriktning $p^{(1)}$ och multiplikator $\lambda^{(2)}$ ges av

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_3^{(1)} \\ -\lambda_2^{(2)} \\ -\lambda_4^{(2)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs $p^{(1)} = (0\ 0\ 1/2)^T$, $\lambda_2^{(2)} = 3/2$ och $\lambda_4^{(2)} = 0$. Maximal steglängd är 2, varför steglängd ett väljs, vilket ger $x^{(2)} = (1 \;\; 0 \;\; 1/2)^T$. Då $\lambda^{(2)} \geq 0$ är $x^{(2)}$ optimal.

5. (a) QP-subproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p^T\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(k)}, \lambda^{(k)})p + \nabla f(x^{(k)})^T p \\ \text{då} & \nabla g_1(x^{(k)})^T p = -g_1(x^{(k)}), \\ & \nabla g_2(x^{(k)})^T p \geq -g_2(x^{(k)}). \end{array}$$

Insättning av numeriska värden ger QP-problemet

$$\begin{array}{ll} \min & -\frac{1}{2}p_1^2 + p_1p_2 - p_2^2 - p_1 - p_2 \\ \text{då} & -p_1 + p_2 = 0, \\ & p_1 \geq -1. \end{array}$$

(b) Vi har

$$\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(k)}, \lambda^{(k)}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

vilket är en negativt definit matris. Även om likhetsbivillkoret elimineras får vi en negativt definit matris kvar. Alltså är problemet inte konvext.

Man kan notera att QP-problemet saknar optimallösning, då $p(t) = (t \;\; t)^T$ är tillåtet för $t \geq -1$. QP-problemets målfunktion för denna lösning ges av

$$-\frac{1}{2}p(t)_1^2 + p(t)_1p(t)_2 - p(t)_2^2 - p(t)_1 - p(t)_2 = -\frac{t^2}{2} - 2t,$$

vilket går mot minus oändligheten då t går mot oändligheten. Alltså är QP-problemet inte väldefinierat.

(c) Man kan tänka sig många modifieringar. Ett sätt är att lägga tillpositiv krökning till QP-problemet genom att modifiera Hessianen så att den blir positivt definit och lösa

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p^T\widetilde{H}p + \nabla f(x^{(k)})^T p \\ \text{då} & \nabla g_1(x^{(k)})^T p = -g_1(x^{(k)}), \\ & \nabla g_2(x^{(k)})^T p \geq -g_2(x^{(k)}), \end{array}$$

där $\widetilde{H}$ är en positivt definit approximation av $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(k)}, \lambda^{(k)})$. Då får vi ett konvext subproblem. Exempelvis kan man addera en tillräckligt stor multipel av enhetsmatrisen till $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(k)}, \lambda^{(k)})$ för att skapa $\widetilde{H}$.