KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Tisdagen den 20 augusti 2002 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Antag att vi vill lösa optimeringsproblemet

$$(P) \quad \min \ f(x)$$

där f är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion på $I\!R^n$. Om $\widehat{x}$ är en punkt i $I\!R^n$ sådan att $\nabla^2 f(\widehat{x})$ har minst ett negativt egenvärde, kan $\widehat{x}$ då vara en lokal minpunkt till (P)? ....(1p)

(b) Låt $b \in I\!R^n$. Gäller då alltid att steepest-descentmetoden (med exakt linjesökning) löser problemet

$$\min \ \tfrac{1}{2}x^T x + b^T x$$

i högst en iteration? .... (1p)

(c) Betrakta optimeringsproblemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0. \end{array}$$

där $f : I\!R^n \to I\!R$ och $g : I\!R^n \to I\!R^m$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Antag nu att x^* är en lokal minpunkt till (P) sådan att $\nabla^2 f(x^*) \not\succeq 0$. Är då garanterat minst ett bivillkor aktivt i x^*? .... (1p)

(d) Betrakta det primala och duala semidefinita programmeringsproblemen

$$(PSDP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \operatorname{trace}(CX) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & X = X^T \succeq 0, \end{array}$$

respektive

$$
(DSDP) \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & \sum_{i=1}^m A_i y_i + S = C, \\ & S = S^T \succeq 0. \end{array}
$$

Är dualitetsgapet garanterat noll för dessa semidefinita programmeringsproblem? ....(1p)

(e) Låt H vara en symmetrisk $n \times n$-matris och låt A vara en $m \times n$-matris med linjärt oberoende rader, där $m \geq 1$. För dessa H och A, låt matrisen K definieras enligt

$$
K = \begin{pmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}.
$$

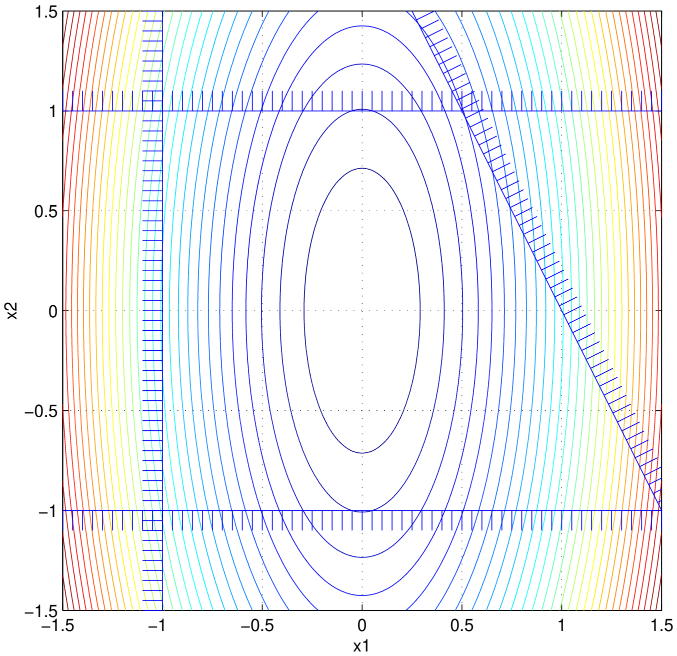
Kan K vara positivt definit? ....(1p)

2. Härled uttrycket för den symmetriska rang-1 uppdateringen, C_k, i kvasi-Newton uppdateringen $B_{k+1} = B_k + C_k$. ....(5p)

3. Betrakta QP-problemet (QP) definierat av

$$
(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & 6x_1^2 + x_2^2 \\ \text{då} & -2x_1 - x_2 \geq -2, \\ & x_1 \geq -1, \\ & -x_2 \geq -1, \\ & x_2 \geq -1. \end{array}
$$

Problemet kan illustreras geometriskt i nedanstående figur,



Lös (QP) med en active-set metod. Starta i punkten $x = (1\ 0)^T$ och håll bivillkoret $-2x_1 - x_2 \geq -2$ aktivt i första iterationen. Du behöver inte räkna ut några exakta numeriska värden, utan kan utnyttja att problemet är tvådimensionellt, och göra en rent geometrisk lösning. Illustrera dina iterationer i figuren som finns längst bak. Motivera varje steg ordentligt. .... (5p)

4. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 3)^2 \\ \text{då} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \geq 0. \end{array}$$

Låt $x^{(0)} = (0\ 1)^T$ och $\lambda^{(0)} = 1$. (I enlighet med läroboken definierar vi lagrangefunktionen som $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.)

Antag att man vill lösa (P) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering. Genomför en iteration utgående från de givna $x^{(0)}$ och $\lambda^{(0)}$. Det subproblem som uppstår får lösas på valfritt sätt. Till exempel kan du gissa optimallösningen ur en figur och verifiera den analytiskt. .... (5p)

5. Betrakta problemet

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 \\ \text{då} & x_1 \geq 0, \\ & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \geq 0. \end{array}$$

Låt $x^* = (0\ 0)^T$. Du behöver inte använda en systematisk metod för att lösa (5a) och (5b).

(a) Finns lagrangemultiplikatorvektor λ^* så att x^* tillsammans med λ^* uppfyller första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor? I så fall, bestäm alla sådana λ^*. .... (2p)

(b) Finns lagrangemultiplikatorvektor λ^* så att x^* tillsammans med λ^* uppfyller andra ordningens tillräckliga optimalitetsvillkor? I så fall, bestäm alla sådana λ^*. .... (2p)

(c) Avgör, baserat på informationen ovan, om x^* är en lokal minpunkt till problemet. .... (1p)

Lycka till!

Namn: .... Personnummer: .... Blad nummer: ....