KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Tisdagen den 17 augusti 2004 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Kan ett konvext optimeringsproblem ha två lokala optimalpunkter med olika målfunktionsvärde? . . . . (1p)

(b) Antag att $\widetilde{x}$ är en tillåten punkt till det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) = 0, \end{array}$$

där $f : I\!R^n \to I\!R$ och $g : I\!R^n \to I\!R^m$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Om $\nabla g_i(\widetilde{x})$, $i = 1, \dots, m$, är linjärt oberoende, är då $\widetilde{x}$ garanterat en reguljär punkt till (NLP)? . . . . (1p)

(c) Antag att x^* är en lokal minpunkt till det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0, \end{array}$$

där $f : I\!R^n \to I\!R$ och $g : I\!R^n \to I\!R^m$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Om $g(x^*) > 0$, gäller det då garanterat att $\nabla f(x^*) = 0$? . . . . (1p)

(d) Betrakta det endimensionella kvadratiska programmeringsproblemet

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^2 \\ \text{då} & x \geq 0. \end{array}$$

Låt $x(\mu)$ beteckna optimallösningen till det tillhörande barriärtransformerade problemet för en positiv barriärparameter μ. Gäller för detta problem att $x(\mu) = \sqrt{\mu}$? . . . . (1p)

(e) Betrakta de semidefinita programmeringsproblemen

$$(P_1)\quad \begin{array}{ll} \min & x \\ \text{då} & Ix \succeq M, \end{array} \qquad \text{respektive} \qquad (P_2)\quad \begin{array}{ll} \max & \operatorname{trace}(MY) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(Y) = 1, \\ & Y = Y^T \succeq 0, \end{array}$$

där M är en känd symmetrisk matris. Är (P_2) ett dualt problem till (P_1)? ....(1p)

2. Betrakta optimeringsproblemet

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{U}}(p_i^T x - u_i)_+^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{L}}(l_i - p_i^T x)_+^2, \\ \text{då} & x \geq 0. \end{array}$$

där $\mathcal{L}$ och $\mathcal{U}$ är komplementära delmängder av $\{1,\ldots,m\}$, dvs $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{U} = \emptyset$ och $\mathcal{L}\bigcup\mathcal{U} = \{1,\ldots,m\}$. Subskripten $''+''$ står för positiva delen, dvs $w_+ = \max(w,0)$ för en skalär w. Konstanterna u_i, $i\in\mathcal{U}$, och l_i, $i\in\mathcal{L}$, är kända liksom de konstanta vektorerna p_i, $i = 1,\ldots,m$. Detta innebär att vi betalar en kvadratisk kostnad för att bryta mot undre gränser l_i, $i\in\mathcal{L}$, respektive övre gränser u_i, $i\in\mathcal{U}$.

(a) Formuleringen (P) är rättfram, men en nackdel är att målfunktionen inte är två gånger konstinuerligt deriverbar. Visa att målfunktionen har kontinuerlig gradient men diskontinuerlig Hessian. .... (2p)

(b) Visa att (P) är ekvivalent med det kvadratiska programmeringsproblemet (QP) på formen

$$(QP)\quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{U}} y_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{L}} y_i^2, \\ \text{då} & y_i \geq p_i^T x - u_i,\ i\in\mathcal{U}, \\ & y_i \geq l_i - p_i^T x,\ i\in\mathcal{L}, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Avgör också om (QP) är ett konvext problem. .... (3p)

Anmärkning: Ovanstående optimeringsproblem är en förenklad version av problem som uppstår inom optimering av dosfördelning inom strålterapi.

3. Härled uttrycket för den symmetriska rang-1 uppdatering, C_k, i kvasi-Newton uppdateringen $B_{k+1} = B_k + C_k$. .... (5p)

4. Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet (QP) definierat av

$$(QP)\quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att (QP) är ett konvext optimeringsproblem. .... (1p)

(b) Låt $\widetilde{x} = (1\ 0\ 0)^T$. Visa att $\widetilde{x}$ inte är en optimallösning till (QP). ....(2p)

(c) Lös (QP) med en active-set metod. Starta i punkten $\widetilde{x}$ och använd information från (4b) på lämpligt sätt. .... (2p)

5. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_1(x) = 0, \\ & g_2(x) \geq 0, \\ & x \in I\!R^2, \end{array}$$

där $f : I\!R^2 \to I\!R$ och $g : I\!R^2 \to I\!R^2$ är två gånger kontinuerligt deriverbara.

Antag att vi vill lösa (NLP) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering. Antag speciellt att vi har nått iteration k, med $x^{(k)} = (0\ 0)^T$ och $\lambda^{(k)} = (-1\ 1)^T$, där

$$f(x^{(k)}) = 0, \qquad \nabla f(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 f(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x^{(k)}) = 0, \qquad \nabla g_1(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 g_1(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$g_2(x^{(k)}) = 1, \qquad \nabla g_2(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 g_2(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Ställ upp det kvadratiska programmeringsproblem som uppstår i iteration k om sekvensiell kvadratisk programmering (utan modifieringar) används. .....(1p)

(b) Visa att det kvadratiska problemet i (5a) inte blir ett konvext problem. . (2p)

(c) Föreslå hur det kvadratiska problemet i (5a) kan modifieras för att ge ett problem som kan användas för sekvensiell kvadratisk programmering. Motivera förslaget noggrannt. ....(2p)

Anmärkning: I enlighet med bokens notation väljs tecknet på λ så att $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$. Observera att bivillkor 1 är ett likhetsbivillkor och bivillkor 2 är ett olikhetsbivillkor.

Lycka till!