KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Fredagen den 18 mars 2005 kl. 14.00–19.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Antag att vi vill lösa optimeringsproblemet

$$(P) \quad \min \; f(x)$$

där f är en två gånger kontiunerligt deriverbar funktion på $\mathbb{R}^n$. Om $\widehat{x}$ är en punkt i $\mathbb{R}^n$ sådan att $\nabla f(\widehat{x}) = 0$, är $\widehat{x}$ då garanterat en lokal minpunkt till (P)? ....(1p)

(b) Betrakta optimeringsproblemet

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0. \end{array}$$

där $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Antag nu att x^* är en reguljär punkt och dessutom en global minpunkt till (P). Gäller då garanterat att x^* uppfyller andra ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor? ....(1p)

(c) Antag att man använder en "active set"-metod för att lösa problemet

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där Q är en positivt definit kvadratisk $n \times n$-matris. Om initialpunkten x_0 väljs så att $Ax_0 \geq b$, gäller det då att metoden konvergerar i högst n steg? ....(1p)

(d) Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är två gånger kontinuerligt deriverbar. Antag x^* uppfyller $Ax^* = b$. Antag att det finns en riktning p så att $Ap \geq 0$ och $\nabla f(x^*)^T p < 0$. Kan då x^* vara en lokal minpunkt till (NLP)? ....(1p)

(e) Betrakta det semidefinita programmeringsproblemet

$$(SDP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & \sum_{j=1}^n A_j x_j \succeq B, \end{array}$$

där A_j, $j = 1, \ldots, n$, och B är symmetriska $m \times m$-matriser. Antag att $\widehat{x}$ är en lokal minpunkt till (SDP). Är $\widehat{x}$ då garanterat också en global minpunkt till (SDP)? .... (1p)

2. Betrakta det semidefinita programmeringsproblemet (P) givet av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & G(x) \succeq 0, \end{array}$$

där $G(x) = \sum_{j=1}^n A_j x_j - B$ för B och A_j, $j = 1, \ldots, n$, symmetriska $m \times m$-matriser. Det tillhörande duala problemet ges av

$$(D) \qquad \begin{array}{lll} \max & \operatorname{trace}(BY) & \\ \text{då} & \operatorname{trace}(A_j Y) = c_j, & j = 1, \ldots, n, \\ & Y = Y^T \succeq 0. & \end{array}$$

En barriärtransformation av (P) ger för en fix positiv barriärparameter μ problemet

$$(P_\mu) \qquad \min \quad c^T x - \mu \ln(\det(G(x))).$$

(a) Visa att första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor för (P_μ) är ekvivalenta med ekvationssystemet

$$\begin{aligned} c_j - \operatorname{trace}(A_j Y) = 0, &\quad j = 1, \ldots, n, \\ G(x)Y - \mu I = 0, & \end{aligned}$$

förutsatt att $G(x) \succ 0$ och $Y \succ 0$ hålls implicit. .... (3p)

(b) Visa att en lösning $x(\mu)$ och $Y(\mu)$ till ekvationssystemet, sådan att $G(x(\mu)) \succ 0$ och $Y(\mu) \succ 0$, är tillåten till (P) respektive (D) med dualitetsgap $m\mu$. .. (2p)

Anmärkning: För en symmetrisk matris M används ovan $M \succ 0$ respektive $M \succeq 0$ för att beteckna att M är positivt definit respektive positivt semidefinit. Du kan utan bevis använda dig av relationerna

$$\frac{\partial \ln(\det(G(x)))}{\partial x_j} = \operatorname{trace}(A_j G(x)^{-1}) \quad \text{för} \quad j = 1, \ldots, n.$$

3. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}(x_1 - 7)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 6)^2 \\ \text{då} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \geq 0, \\ & x_1 \geq 0. \end{array}$$

Låt $x^{(0)} = (1\ 0)^T$ och $\lambda^{(0)} = (2\ 2)^T$. (I enlighet med läroboken definierar vi lagrangefunktionen som $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.)

Antag att man vill lösa (P) med hjälp av en primal-dual inrepunktsmetod. Låt $\mu = 2$ och genomför en iteration utgående från de givna $x^{(0)}$ och $\lambda^{(0)}$. Ställ upp det linjära ekvationssystem som uppstår dels på allmän form och dels med explicita numeriska värden. Det behöver inte lösas för full poäng på uppgiften, men du måste ange hur dess lösning skulle användas för att generera nästa iterationspunkt. .... (5p)

4. Betrakta samma ickelinjära optimeringsproblem (P) som i uppgift 3, dvs

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}(x_1 - 7)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 6)^2 \\ \text{då} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \geq 0, \\ & x_1 \geq 0. \end{array}
$$

Låt $x^{(0)} = (1\ 0)^T$ och $\lambda^{(0)} = (2\ 2)^T$. (I enlighet med läroboken definierar vi lagrangefunktionen som $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.)

Antag att man vill lösa (P) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering. Genomför en iteration utgående från de givna $x^{(0)}$ och $\lambda^{(0)}$. Ställ upp det kvadratiska programmeringsproblem som uppstår dels på allmän form och dels med explicita numeriska värden. Det kvadratiska programmeringsproblemet får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. Du behöver inte utföra någon linjesökning. .... (5p)

5. Låt $\widetilde{x} = (1\ 2\ 3\ 4)^T$ och låt $\widetilde{f} : I\!R^4 \to I\!R$ vara en två gånger kontinuerligt differentierbar funktion sådan att

$$
\nabla \widetilde{f}(\widetilde{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \nabla^2 \widetilde{f}(\widetilde{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
$$

(a) Bestäm $c \in I\!R^4$ så att $\widetilde{x}$ uppfyller första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor till problemet

$$
\min \quad \widetilde{f}(x) + c^T x.
$$

.... (1p)

(b) För det val av c du gjort i (5a), bestäm det minimala antalet linjära likhetsbivillkor som behövs läggas till problemet i (5a) för att $\widetilde{x}$ garanterat ska bli en lokal minpunkt till det resulterande problemet. Bestäm även en sådan uppsättning linjära likhetsbivillkor. Du kan utnyttja att $\nabla^2 \widetilde{f}(\widetilde{x})$ är en block-diagonal matris där diagonalblockens storlek är 1×1 eller 2×2. .... (4p)

Lycka till!