KTH Matematik

5B1817 Tillämpad ickelinjär optimering

Föreläsning 8

Kvadratisk programmering med olikhetsbivillkor
Inrepunktsmetoder

Inrepunktsmetoder för kvadratisk programmering

En inrepunktsmetod för att lösa (IQP) följer approximativt *barriärtrajektorian* som skapats genom en störning av optimalitetsvillkoren.

För att förstå metoden tittar vi först på trajektorian.

Därefter studerar vi metoden.

Fokus är på primal-duala inrepunktsmetoder.

Optimalitetsvillkor för (IQP)

$$
(IQP) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}
$$

Vi antar att $H \succeq 0$. Problemet är då konvext.

Optimalitetsvillkoren för (IQP) kan skrivas

$$
\begin{aligned}
Ax - s &= b, \\
Hx - A^T\lambda &= -c, \\
s_i \lambda_i &= 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\
s &\geq 0, \\
\lambda &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet

Om komplementaritetsvillkoret $s_i\lambda_i = 0$ störs till $s_i\lambda_i = \mu$ för en positiv parameter μ, får vi det *primal-duala ekvationssystemet* på formen

$$\begin{aligned} Ax - s &= b, \\ Hx - A^T\lambda &= -c, \\ s_i\lambda_i &= \mu, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Olikheterna $s \geq 0$, $\lambda \geq 0$, hålls "implicit".

Parametern μ kallas *barriärparametern*.

Påstående. *Det primal-duala ekvationssystemet är väldefinierat och har en unik lösning med $s > 0$ och $\lambda > 0$ för alla $\mu > 0$ om $H \succeq 0$, $\{(x, s, \lambda) : Ax - s = b,\ Hx - A^T\lambda = -c,\ s > 0,\ \lambda > 0\} \neq \emptyset$.*

Denna lösning betecknas $x(\mu)$, $s(\mu)$ och $\lambda(\mu)$.

Det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet, forts.

Det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet kan skrivas på vektorform:

$$\begin{aligned} Ax - s &= b, \\ Hx - A^T\lambda &= -c, \\ S\Lambda e &= \mu e, \end{aligned}$$

där $S = \mathrm{diag}(s)$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda)$ och $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

Vi kan göra tolkning av primal och dual tillåtenhet och dualitetsgap.

Primalt synsätt

Primalt synsätt: $x(\mu), s(\mu)$ löser

$$
(P_\mu) \qquad \begin{array}{ll} \text{min} & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln s_i \\ \text{då} & Ax - s = b, \quad s > 0, \end{array}
$$

med $\lambda(\mu)$ som Lagrangemultiplikator till $Ax - s = b$.

Optimalitetsvillkor till (P_μ):

$$
\begin{aligned}
Hx + c &= A^T \lambda, \\
Ax - s &= b, \\
-\frac{\mu}{s_i} &= -\lambda_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\
s &> 0.
\end{aligned}
$$

Barriärtrajektorian

Barriärtrajektorian definieras som mängden $\{(x(\mu), s(\mu), \lambda(\mu)) : \mu > 0\}$.

Det primal-duala ickelinjära ekvationssystemet är att föredra framför det primala. Rent primalt synsätt ger stor ickelinjäritet.

Sats. *Om barriärtrajektorian är väldefinierad gäller* $\lim_{\mu\to 0} x(\mu) = x^*$, $\lim_{\mu\to 0} s(\mu) = s^*$, $\lim_{\mu\to 0} \lambda(\mu) = \lambda^*$, *där* x^* *är optimallösning till* (IQP), *och* λ^* *är motsvarande lagrangemultiplikatorvektor.*

Barriärtrajektorian konvergerar alltså mot en optimallösning.

Primal-dual inrepunktsmetod

Primal-dual inrepunktsmetod baserad på Newton-iterationer på störda optimalitetsvillkoren.

För en given punkt x, s, λ, med $s > 0$ och $\lambda > 0$ väljs lämpligt värde på μ. Newton-iterationen blir då

$$\begin{pmatrix} H & 0 & -A^T \\ A & -I & 0 \\ 0 & \Lambda & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta s \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Hx + c - A^T\lambda \\ Ax - s - b \\ S\Lambda e - \mu e \end{pmatrix}.$$

Observera att $Ax - s = b$ och $Hx - A^T\lambda = -c$ inte behöver vara uppfyllt i initialpunkten. Uppfyllt i $x + \Delta x$, $s + \Delta s$, $\lambda + \Delta\lambda$.

En iteration i en primal-dual inrepunktsmetod

- Välj värde på μ.
- Beräkna riktningarna Δx, Δs och $\Delta\lambda$ ur

$$\begin{pmatrix} H & 0 & -A^T \\ A & -I & 0 \\ 0 & \Lambda & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta s \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Hx + c - A^T\lambda \\ Ax - s - b \\ S\Lambda e - \mu e \end{pmatrix}.$$

- Beräkna maximala steglängden α_{max} ur $s + \alpha\Delta s \geq 0$, $\lambda + \alpha\Delta\lambda \geq 0$.
- Låt α vara lämpligt steg, $\alpha = \min\{1, \eta \cdot \alpha_{\text{max}}\}$, där $\eta < 1$.
- Låt $x = x + \alpha\Delta x$, $s = s + \alpha\Delta s$, $\lambda = \lambda + \alpha\Delta\lambda$.

Uppförande av inrepunktsmetod

Normalt få iterationer, storleksordningen 20. (Beror på strategin för att reducera μ). Antal iterationer växer normalt ej med problemstorleken.

Newtoniterationen kan skrivas

$$\begin{pmatrix} H & A^T \\ A & -S\Lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ -\Delta\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Hx + c - A^T\lambda \\ Ax - b - \mu\Lambda^{-1}e \end{pmatrix},$$

$$\Delta s = A(x + \Delta x) - s - b.$$

Symmetrisk indefinit matris. Gles matris om H och A är glesa.

Oklart hur man kan “varmstarta” metoden effektivt.