KTH Matematik

**Tentamen i 5B1817 Tillämpad ickelinjär optimering**
**Onsdagen den 20 december 2006 kl. 14.00–19.00**

*Examinator:* Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

*Tillåtna hjälpmedel:* Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

*Lösningsmetoder:* Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

*OBS!* Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

24 poäng ger säkert godkänt.

---

**1.** Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet $(QP)$ definierat av

$$(QP) \quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x \\ \text{då} & Ax = b, \end{array}$$

med

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = 9.$$

Bestäm först en matris $Z$ vars kolumner bildar en bas i nollrummet till $A$. Låt $x_0 = (3\ 3\ 3)^T$. Lös därefter $(QP)$ genom att skriva $x = x_0 + Zv$ och beräkna $v$ ur ett ekvationssystem, varefter optimalt $x$ kan bestämmas. Verifiera slutligen att det finns en lagrangemultiplikator $\lambda \in I\!R$ som tillsammans med det optimala $x$ du räknat ut uppfyller första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor till $(QP)$. . . . . . . . . (10p)

*Anmärkning:* Du har just löst ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix},$$

eller hur?

**2.** Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet $(NLP)$ definierat av

$$(NLP) \quad \begin{array}{ll} \min & -x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{då} & x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 66 = 0, \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3. \end{array}$$

Vi har två föreslagna lösningar till problemet:

$$x^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{33} & 0 \end{pmatrix}^T \quad \text{och} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

(a) Avgör med hjälp av lämpliga optimalitetsvillkor om någon eller några av de föreslagna punkterna är lokala minpunkter till $(NLP)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (6p)

(b) Använd problemstrukturen för att avgöra om någon eller några av de föreslagna punkterna är globala minpunkter till $(NLP)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (4p)

**3.** Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_1(x) = 0, \\ & g_2(x) \geq 0, \\ & x \in I\!R^2, \end{array}$$

där $f : I\!R^2 \to I\!R$ och $g : I\!R^2 \to I\!R^2$ är två gånger kontinuerligt deriverbara.

Antag att vi vill lösa $(NLP)$ med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering. Antag speciellt att vi startar i punkten $x^{(0)} = (0\ 0)^T$ där

$$f(x^{(0)}) = 0, \qquad \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x^{(0)}) = 0, \qquad \nabla g_1(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 g_1(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_2(x^{(0)}) = -1, \qquad \nabla g_2(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 g_2(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Antag också att initiala uppskattningen av lagrangemultiplikatorerna, $\lambda^{(0)}$, väljs till $\lambda^{(0)} = (2\ 0)^T$.

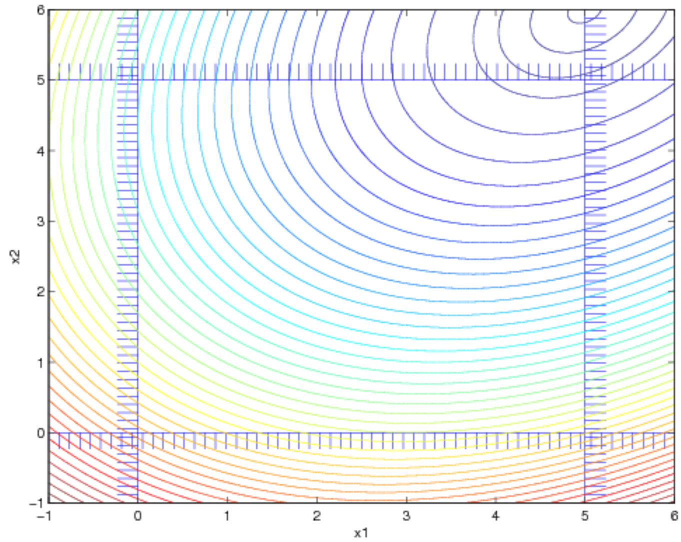
Genomför en iteration med sekvensiell kvadratisk programmering, dvs beräkna $x^{(1)}$ och $\lambda^{(1)}$. (Vi antar att ingen linjesökning behöver utföras.) Det kvadratiska programmeringsproblem som uppstår för lösas på valfritt sätt som inte behöver vara systematiskt. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (10p)

*Anmärkning:* I enlighet med bokens notation väljs tecknet på $\lambda$ så att $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.

**4.** Betrakta QP-problemet $(QP)$ definierat av

$$(QP) \quad \begin{array}{ll} \min & 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 18x_1 - 26x_2 \\ \text{då} & 0 \leq x_1 \leq 5, \\ & 0 \leq x_2 \leq 5. \end{array}$$

Problemet kan illustreras geometriskt i nedanstående figur,




(a) Lös $(QP)$ med en active-set metod. Starta i punkten $x = (1\ \ 0)^T$ med bivillkoret $x_2 \geq 0$ aktivt. Du behöver inte räkna ut några exakta numeriska värden, utan kan utnyttja att problemet är tvådimensionellt, och göra en rent geometrisk lösning. Illustrera dina iterationer i figuren tillhörande uppgift 4a som finns längst bak. Motivera varje steg ordentligt. ................................(4p)

(b) Antag nu att bivillkoret $x_2 - x_1 \geq -2$ läggs till $(QP)$, så att vi får problemet $(QP')$ enligt

$$(QP') \quad \begin{array}{ll} \min & 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 18x_1 - 26x_2 \\ \text{då} & 0 \leq x_1 \leq 5, \\ & 0 \leq x_2 \leq 5, \\ & x_2 - x_1 \geq -2. \end{array}$$

Lös $(QP')$ med en active-set metod. Starta i punkten $x = (1\ \ 0)^T$ med bivillkoret $x_2 \geq 0$ aktivt. Du behöver inte räkna ut några exakta numeriska värden, utan kan utnyttja att problemet är tvådimensionellt, och göra en rent geometrisk lösning. Rita in bivillkoret $x_2 - x_1 \geq -2$ och illustrera dina iterationer i figuren tillhörande uppgift 4b som finns längst bak. Motivera varje steg ordentligt. (6p)

**5.** Betrakta det semidefinita programmeringsproblemet $(P)$ givet av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & G(x) \succeq 0, \end{array}$$

där $G(x) = \sum_{j=1}^n A_j x_j - B$ för $B$ och $A_j$, $j = 1, \dots, n$, symmetriska $m \times m$-matriser. Det tillhörande duala problemet ges av

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \max & \operatorname{trace}(BY) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(A_j Y) = c_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ & Y = Y^T \succeq 0. \end{array}$$

En barriärtransformation av $(P)$ ger för en fix positiv barriärparameter $\mu$ problemet

$$(P_\mu) \qquad \min \quad c^T x - \mu \ln(\det(G(x))).$$

(a) Visa att första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor för $(P_\mu)$ är ekvivalenta med ekvationssystemet

$$\begin{aligned} c_j - \operatorname{trace}(A_j Y) &= 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ G(x)Y - \mu I &= 0, \end{aligned}$$

förutsatt att $G(x) \succ 0$ och $Y \succ 0$ hålls implicit. .......................... (3p)

(b) Visa att en lösning $x(\mu)$ och $Y(\mu)$ till ekvationssystemet, sådan att $G(x(\mu)) \succ 0$ och $Y(\mu) \succ 0$, är tillåten till $(P)$ respektive $(D)$ med dualitetsgap $m\mu$. .. (5p)

(c) Till skillnad från linjärprogrammering spelar det roll hur ekvationen $G(x)Y - \mu I = 0$ skrivs för de ekvationssystem som uppstår då ekvationssystemet ovan ska lösas med Newtons metod. Exempelvis ger $G(x)Y - \mu I = 0$ respektive $YG(x) - \mu I = 0$ i allmänhet olika Newtonriktningar. Varför? ............ (2p)

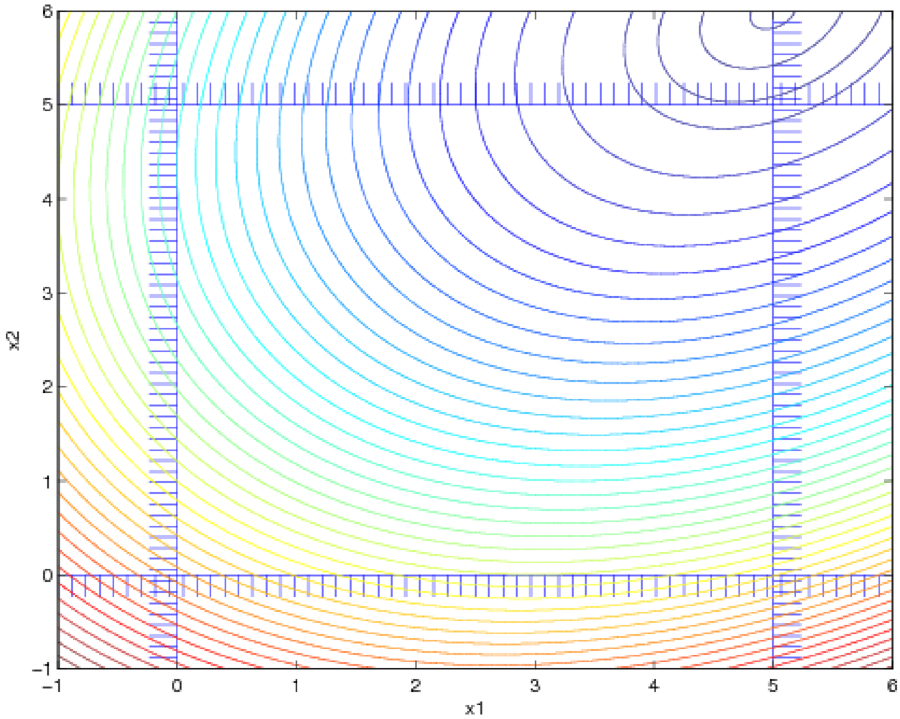
*Anmärkning:* För en symmetrisk matris $M$ används ovan $M \succ 0$ respektive $M \succeq 0$ för att beteckna att $M$ är positivt definit respektive positivt semidefinit. Du kan utan bevis använda dig av relationerna

$$\frac{\partial \ln(\det(G(x)))}{\partial x_j} = \operatorname{trace}(A_j G(x)^{-1}) \quad \text{för} \quad j = 1, \ldots, n.$$

*Lycka till!*

Namn: . . . . . . . . . . . . . . . . . Personnummer: . . . . . . . . . . . . . . . . . Blad nummer: . . . . . . . . . . . . . . . . .

Figur till uppgift 4a:




Figur till uppgift 4b: