TENTAMEN FÖR OPTIMIZATION SF1811/SF1831/SF1841

MARCH 19, 2011

Examinator: Amol Sasane (Phone: 790 7320)
Skrivtid: 0800-1300
Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal är tillåtna. Miniräknare är **inte** tillåtna! Formelblad är bifogat.
Instruktioner: Motivera dina svar noggrant. Skriv ditt namn på varje inlämnat blad och numrera sidorna. Börja på ny sida för varje uppgift. För godkänt krävs 25 poäng (inklusive bonuspoäng från hemuppgifter).

---

(1) (a) Betrakta följande linjärprogrammeringsproblem (NFP):

$$\text{(NFP)} : \begin{cases} \text{minimera} & c^\top x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{cases}$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Från matrisen A:s och vektorn b:s speciella struktur, följer det att problemet (NFP) är ett balanserat nätverksflödesproblem.

(i) Rita motsvarande nätverk.

(ii) Kontrollera att

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

är en optimal lösning till problemet (NFP) genom att använda lösningsmetoden för balanserade nätverksflödesproblem.

(6 poäng)

(b) Betrakta matrisen

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 10 & 100 & 1000 \\ 100 & 1000 & 10000 \end{bmatrix}.$$

(i) Avgör om H är positivt semidefinit eller inte, genom att använda $LDL^\top$-faktorisering.

(ii) Kontrollera att

$$c = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

tillhör nollrummet till H.

(iii) Betrakta det kvadratiska optimeringsproblemet utan bivillkor

$$(\mathrm{Q}) : \begin{cases} \text{minimera} & \frac{1}{2}x^\top Hx + c^\top x \\ \text{då} & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Har (Q) en optimal lösning? Motivera ditt svar.

(4 poäng)

(2) (a) Betrakta följande linjärprogrammeringsproblem:

$$(\mathrm{LP}) : \begin{cases} \text{minimera} & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \text{då} & x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 \qquad = 7, \\ & x_1 + x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 7, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0, \\ & x_4 \geq 0, \\ & x_5 \geq 0. \end{cases}$$

(i) Hitta en optimal lösning till (LP) genom att använda simplexmetoden. Börja med x_4 och x_5 som basvariabler.

(ii) Skriv ner det duala problemet till (LP).
Skriv ner en optimal lösning till det duala problemet genom att använda uträkningen från del (i) ovan.

(6 poäng)

(b) Bestäm om följande påståenden är sanna eller falska. Alla påståenden nedan refererar till linjärprogrammeringsproblem i standardform:

$$\begin{cases} \text{minimera} & c^\top x \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{cases}$$

där variabeln x tar värden i $\mathbb{R}^n$, vektorerna $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ och matrisen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ har rank $m < n$.

(i) För varje problem på den ovan nämnda formen har alla tillåtna baslösningar exakt $n - m$ komponenter som är noll.

(ii) För varje problem på ovan nämnda form, om för en tillåten baslösning $\overline{x}$ det gäller att den reducerade kostnadsvektorn r_ν för icke-bas-variablerna inte är ≥ 0, så kan $\overline{x}$ inte vara optimal.

(iii) Om vi har hittat en optimal lösning $\widehat{x}$ genom att använda simplexmetoden för att lösa ett linjärprogrammeringsproblem av ovan nämnda typ, så är $\widehat{x}$ alltid en tillåten baslösning.

(iv) För varje problem av ovan nämnda typ, så är antalet tillåtna baslösning alltid detsamma som antalet bastupler.

(4 poäng)

(3) (a) Hitta en optimal lösning till det kvadratiska optimeringsproblemet

$$\begin{cases} \text{minimera} & 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{då} & 3x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

genom att använda nollrumsmetoden. Motivera ditt svar.

(3 poäng)

(b) Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av

$$f(x) = \log(1 + e^{-2x}) + x \quad \text{för } x \in \mathbb{R}.$$

(i) Visa att $f''(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Om $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ är punktföljden som genereras med Newtons metod för att hitta en global minimerare för f, visa att

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{2}\sinh(2x^{(k)}), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

där för ett reellt θ, $\sinh\theta := (e^\theta - e^{-\theta})/2$.

(iii) Visa att om startpunkten är sådan att följden $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ konvergerar, så måste följdens gränsvärde vara 0.

(4 poäng)

(c) (i) Vad menas det när man säger att delmängden C av $\mathbb{R}^n$ är en konvex mängd?

(ii) Är $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^8 + x_2^{12} + x_3^{16} \leq 2011\}$ en konvex delmängd av $\mathbb{R}^3$?

(3 poäng)

(4) (a) Betrakta funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ som ges av

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2x_3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Visa att mängden av f:s värden på $\mathbb{R}^3$ inte är nedåt begränsad.
Ledning: Betrakta en kurva $t \mapsto p(t) \in \mathbb{R}^3$ sådan att $f(p(t)) \to -\infty$ då $t \to \infty$.

(ii) Kontrollera att gradienten till f i punkten $v := (1, 1, 1)$ är noll.

(iii) Är v en lokal minimerare till f? Motivera ditt svar.

(5 poäng)

(b) Lös optimeringsproblemet

$$\begin{cases} \text{minimera} & (x_1-2)^2+x_2^2 \\ \text{då} & x_1^2+x_2^2=1 \end{cases}$$

med hjälp av Lagrangemultiplikatormetoden.

(5 poäng)

(5) (a) Betrakta följande problem:

$$\begin{cases} \text{minimera} & x_1x_2 \\ \text{då} & x_1^2+x_2^2 \le 1 \\ & x_1+x_2 \ge 1. \end{cases}$$

(i) Skissa den tillåtna mängden.
(ii) Är problemet ett konvext optimeringsproblem?
(iii) Skissa följande nivåkurvor:

$$\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1x_2 = V\}$$

för $V=\frac{1}{2}$, $V=\frac{1}{4}$ och $V=0$ i samma figur.
(iv) Skriv ner KKT-villkoren tillhörande detta optimeringsproblem, och kontrollera att punkten $\widehat{x} := (1,0)$ uppfyller dem.
Är $\widehat{x}$ en optimal lösning till problemet? Motivera ditt svar.

(6 poäng)

(b) Använd Lagrangerelaxeringsmetoden för att hitta dualen (D) till problemet

$$(\mathrm{P}) : \begin{cases} \text{minimera} & x^2 \\ \text{då} & x \ge 1. \end{cases}$$

Använd dualitetsteori för att hitta en optimal lösning till det duala problemet (D), och en optimal lösning till det primala problemet (P). Motivera dina svar.

(4 poäng)

Slut på examen.