TENTAMEN FÖR OPTIMIZATION SF1811/SF1831/SF1841

JUNE 8, 2011

Examinator: Amol Sasane (Phone: 790 7320)
Skrivtid: 1400-1900
Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal är tillåtna. Miniräknare är **inte** tillåtna! Formelblad är bifogat.
Instruktioner: Motivera dina svar noggrant. Skriv ditt namn på varje inlämnat blad och numrera sidorna. Börja på ny sida för varje uppgift. För godkänt krävs 25 poäng (inklusive bonuspoäng från hemuppgifter).

---

(1) (a) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$(\mathrm{P}): \left\{ \begin{array}{rl} \text{minimera} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 2011x_{2011} \\ \text{då} & x_1 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ & \vdots \\ & x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2011} \geq 2011 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \dots,\ x_{2011} \geq 0. \end{array} \right.$$

Kontrollera att vektorn

$$\widehat{x} = 2011e_1 := \left[\begin{array}{cccc} 2011 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]^\top \in \mathbb{R}^{2011}$$

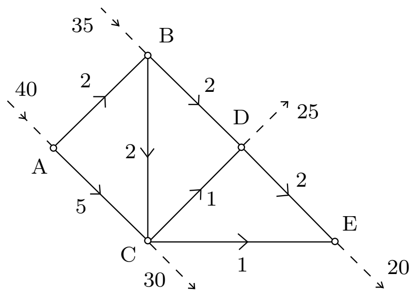
är tillåten för (P).
Bestäm det duala linjärprogrammeringsproblemet (D) till det primala problemet (P).
Kontrollera att vektorn

$$\widehat{y} = e_{2011} := \left[\begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]^\top \in \mathbb{R}^{2011}$$

är tillåten för (D).
Använd dualitetsteori för att förklara varför $\widehat{x}$ är en optimal lösning till (P).

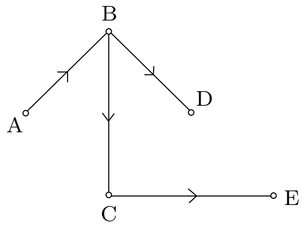
(5 poäng)

(b) Betrakta minimalkostnadsflödesproblemet för nätverket som visas nedan.



Vi har namngett de 5 noderna A,B,C,D,E. Noderna A och B är källnoder med inflöde 40 respektive 35 enheter, medan noderna C, D och E är sänknoder med utflöde 30, 25 respektive 20 enheter. Bredvid varje riktad sid har vi indikerat kostnaden c_{ij} per enhetsflöde.

Visa att den tillåtna baslösningen som motsvarar det uppspännande trädet som ges nedan är en optimal lösning för det minimala nätverksflödesproblemet som motsvarar detta nätverk.



(5 poäng)

(2) (a) Hitta en bas för bildrummet och nollrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}.$$

(5 poäng)

(b) Betrakta följande kvadratiska optimeringsproblem:

$$\begin{cases} \text{minimera} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Använd Lagrangemetoden för att kontrollera att $\widehat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ är en optimal lösning.

(5 poäng)

(3) (a) Betrakta linjärprogrammeringsproblemet som ges av

$$\begin{cases} \text{maximera} & x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \text{då} & x_1 + 3x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

(Notera att det är ett maximeringsproblem.)
Skriv ner problemet som ett linjärprogrammeringsproblem på standardform.
Lös det genom att använda simplexmetoden, och starta med slackvariablerna som basvariabler.

(5 poäng)

(b) Använd Lagrangemultiplikatormetoden för att hitta en optimal lösning till följande problem:

$$\begin{cases} \text{minimera} & x_1 - x_2 \\ \text{då} & x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

(5 poäng)

(4) Betrakta funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ som ges av

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^4 + x_1 \quad (x \in \mathbb{R}^3).$$

(a) Är f en konvex funktion på $\mathbb{R}^3$?

(3 poäng)

(b) Betrakta följande optimeringsproblem utan bivillkor:

$$\begin{cases} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Starta med punkten $x^{(1)} = 0 \in \mathbb{R}^3$, och använd Newtons metod för att hitta nästa iterationspunkt $x^{(2)}$.

(Du får utan bevis använda att $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.)

(2 poäng)

(c) Betrakta nu optimeringsproblemet med bivillkor som ges av

$$\begin{cases} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & 0 \leq x_1 \leq 1, \\ & 0 \leq x_2 \leq 1, \\ & 0 \leq x_3 \leq 1. \end{cases}$$

Uppfyller punkten $\widehat{x} := 0 \in \mathbb{R}^3$ KKT-villkoren för detta problem?
Kan vi dra slutsatsen att $\widehat{x}$ är en optimal lösning? Motivera ditt svar.

(5 poäng)

(5) (a) Betrakta problemet

$$(\mathrm{P}):\begin{cases}\text{minimera} & x_1^3+x_2^3\\ \text{då} & 4x_1+9x_2\geq 1,\\ & x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.\end{cases}$$

(i) Skriv ner de Lagrange relaxede problemen som tillhör det ovanstående problemet genom att relaxa olikhetsvillkoret $4x_1+9x_2\geq 1$.

(ii) Bestäm det duala problemet (D) till (P) och hitta en optimal lösning $\widehat{y}$ till (D).

(iii) Hitta en optimal lösning $\widehat{x}$ till problemet (P). Motivera ditt svar.

(7 poäng)

(b) Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Alla påståenden nedan avser optimeringsproblem på formen:

$$\begin{cases}\text{minimera} & f(x)\\ \text{då} & x\in\mathcal{F},\end{cases}$$

där variabeln x tar värden i delmängden $\mathcal{F}$ av $\mathbb{R}^n$, och $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion på $\mathbb{R}^n$.

(i) Om problemet är konvext, så är Hessianen till f positivt semidefinit i alla punkter i $\mathcal{F}$.

(ii) Om problemet är konvext, så måste den ha åtminstone en optimal lösning.

(iii) Om problemet är konvext, så har den högst en lösning.

(3 poäng)

End of the exam.