TENTAMEN FÖR OPTIMIZATION SF1811/SF1831/SF1841

JUNE 7, 2010

Examinator: Amol Sasane (Phone: 790 7320)
Skrivtid: 1400-1900
Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal är tillåtna. Miniräknare är **inte** tillåtna! Formelblad är bifogat.
Instruktioner: Motivera dina svar noggrant. Skriv ditt namn påvarje inlämnat blad och numrera sidorna. Börja på ny sida för varje uppgift. För godkänt krävs 25 poäng (inklusive bonuspoäng från hemuppgifter).

---

(1) Betrakta följande linjärprogrammeringsproblem:

$$(P): \begin{cases} \text{minimera} & 7x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 7, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

(a) Visa att följande är en optimallösningen till problemet (P):

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{14}{5}, \quad x_3 = \frac{7}{5}, \quad x_4 = 0.$$

(b) Ställ upp det duala problemet (D) till (P).

(c) Åskådliggör (D) i en figur och bestäm optimal lösning till (D) grafiskt ur denna figur.
Kontrollera därefter, med hjälp av räkningarna i (a)-uppgiften ovan, att du verkligen hittat rätt duallösning.

(d) Antag att kostnadsvektorn i problem (P) ändras från

$$c := \begin{bmatrix} 7 & 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}^\top$$

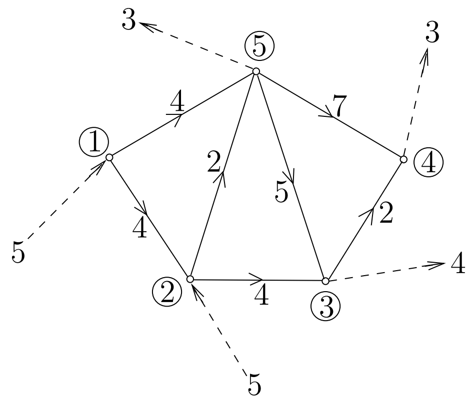
till den nya vektorn

$$\widetilde{c} := \begin{bmatrix} 7+\delta & 4+\delta & 8+\delta & 6+\delta \end{bmatrix}^\top,$$

där δ är ett reellt tal. För vilka δ är lösningen i (a)-uppgiften fortfarande optimal?

(12 poäng)

(2) Betrakta Minkostnadsflödesproblemet i figuren nedan.



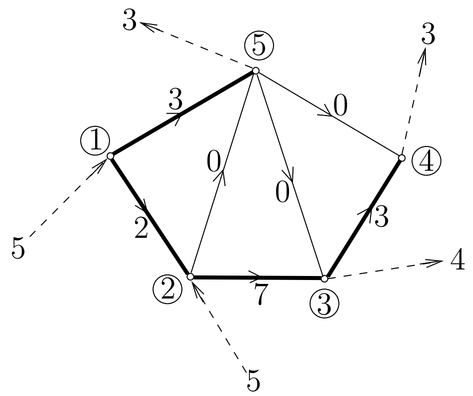
Vid varje nod står dess nodnummer. Noderna 1 och 2 är noder med tillgång av 5 enheter vardera, och noderna 3, 4, 5 är noder med efterfrågan av 4, 3, respektive 3 enheter. På varje båge står dess kostnad c_{ij} per flödesenhet.

(a) Ställ upp incidensmatrisen A till nätverket, med foljande ordning av bågarna:

$$(1,2),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,5),\ (3,4),\ (5,3),\ (5,4).$$

(Notationen (i,j) betyder den riktade bågen från nod i till nod j.)
Låt x_{ij} beteckna flödet från nod i till nod j. Specificera bivillkoren på variablerna x_{ij} för det här linjärprogrammeringsproblemet.

(b) Visa att lösningen i figuren nedan är optimal. Vid varje båge (i,j) står det aktuella flödet x_{ij}.



(c) Antag att c_{53} ändras från 5 till 3. Kontrollera att lösningen i (b)-uppgiften inte är optimal längre. Bestäm därför en optimal lösning till detta nya problem (med $c_{53} = 3$). Utgå från den givna lösningen.

(12 poäng)

(3) (a) Antag att $C \subset \mathbb{R}^n$ är en konvex mängd. Vad betyder det när man säger att en funktion $f : C \to \mathbb{R}$ är en konvex funktion?

(b) För vilka reella tal a blir följande funktion konvex på $\mathbb{R}^3$?

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_2^4, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

(c) Hitta alla globala minimipunkter för funktionen g på $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$g(x_1, x_2) = x_1^4 - 12x_1x_2 + x_2^4, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(2+5+5=12 poäng)

(4) Betrakta följande optimeringsproblem:

$$(NP) : \begin{cases} \text{minimera} & x_1 \\ \text{då} & x_2 - x_1^3 \leq 0, \\ & -x_2 - x_1^3 \leq 0. \end{cases}$$

(a) Åskådliggör det tillåtna området grafiskt i en figur. I samma figur, skissa nivåkurvor för målfunktionen. Dra slutsatsen att $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ är en global minimipunkt till (NP).

(b) Skriv ner KKT-optimeringsvillkoren motsavarande problemet (NP), och visa att de är ej uppfyllda i punkten $(0, 0)$. Förklara med hänsyn till regularitet i punkten $(0, 0)$.

(7 poäng)

(5) Betrakta det kvadratiska optimeringsproblemet

$$(QP) : \begin{cases} \text{minimera} & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{då} & x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

(a) Hitta en optimal lösning till (QP) med hjälp av nollrumsmetoden.

(b) Antag att likheten i bivillkoret ändras till olikhet $\leq$, så att det nya bivillkoret blir $x_1 - x_2 \leq 1$. Använd Lagrangerelaxeringsmetoden för att lösa detta nya problem

$$(QP') : \begin{cases} \text{minimera} & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{då} & x_1 - x_2 \leq 1. \end{cases}$$

(7 poäng)

Slut på tentamen.