



TENTAMEN FÖR OPTIMIZATION SF1811/SF1831/SF1841

20 MARS, 2010

Examinator: Amol Sasane (Phone: 790 7320)

Skriptid: 8:00-13:00

Hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal är tillåtna. Miniräknare är **inte** tillåtna! Formelblad är bifogat.

Instruktioner: Motivera dina svar noggrant. Skriv ditt namn på varje inlämnat blad och numrera sidorna. Börja på ny sida för varje uppgift. För godkänt krävs 25 poäng (inklusive bonuspoäng från hemuppgifter).

- (1) Betrakta följande linjärprogrammeringsproblem:

$$(LP) : \begin{cases} \text{minimera} & 4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ \text{under bivilkoren} & 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ & 6x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Lös problemet (LP) med simplexmetoden. Börja med att ta x_3 och x_4 som basvariabler.

(6 poäng)

- (2) Antag att $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är en matris som uppfyller $A^\top = -A$, $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, och att följande linjärprogrammeringsproblem har minst en tillåten lösning:

$$\begin{cases} \text{minimera} & c^\top x \\ \text{under bivilkoren} & Ax \geq -c, \\ & x \geq 0. \end{cases}$$

Visa att problemet har minst en optimal lösning. Vad är målfunktionens optimala värde?

(5 poäng)

- (3) Var och en av personerna A,B,C,D äger en lagerlokal och de driver de fyra lagerlokalerna tillsammans. Lagrens individuella kapaciteter ges av följande tabell:

Lagerlokal	A	B	C	D
Kapacitet (ton)	150	200	300	350

A,B,C,D har tillsammans skrivit kontrakt med ett jordbruksföretag F, som producerar en viss jordbruksprodukt P, och kommit överens om att lagra detta års produktion av

produkt P. Jordbruksföretaget F äger tre jordbruk F1, F2, F3, som alla producerar P. Detta år producerar F1, F2 och F3 enligt följande tabell:

Jordbruk	F1	F2	F3
Mängd P (ton)	250	250	500

Eftersom dessa jordbruk och lagerlokaler är utspridda över landet, så skiljer sig kostnaderna för att transportera produkten P från jordbruken till lagerlokalerna. Kostnaden för att transportera mellan de olika jordbruken och lagerlokalerna visas i tabellen nedan, i enheten 1000 SEK/ton:

	A	B	C	D
F1	10	5	11	11
F2	10	2	7	12
F3	9	1	4	8

Jordbruksföretaget vill transportera hela årets produktion av P till lagerlokalerna, och det vill göra det så att transportkostnaderna blir minimala, samtidigt som bivillkoren ovan är uppfyllda.

- Formulera problemet som ett balanserat transportproblem. Skriv ner variablerna och bivillkoren tydligt.
- Hitta en tillåten första baslösning till problemet som beskrivs ovan, med hjälp av nordvästra hörnmetoden.
- Hitta en optimal lösning.
- Antag att på grund av ett vägarbete på väg till lagerlokal A, så ökar alla transportkostnader till denna lagerlokal med 2 enheter, d v s med 2000 SEK/ton. Förklara varför den optimala lösningen inte ändras, genom att använda strukturen av allmänna balanserade transportproblem.

(2+2+4+2=10 poäng)

- En civilingenjör får uppgiften att bestämma höjderna över havet för tre berg, H_1 , H_2 , H_3 . Han står vid havsnivån och mäter höjderna (i meter) för H_1 , H_2 , H_3 och får resultaten 1236, 1941, respektive 2417. För att kontrollera resultatet, så klättrar han upp på berg H_1 och mäter höjden av H_2 ovanför H_1 till 711m, och höjden för H_3 ovanför H_1 till 1177m. Han noterar att dessa senare mätvärden inte stämmer med de som gjordes vid havsnivån, och klättrar därför upp på berg H_2 , och mäter därifrån höjden av H_3 att vara 474m ovanför H_2 . Återigen noterar han att dessa mätvärden inte stämmer med de tidigare. Medan han kör tillbaka till sitt kontor, så kommer han plötsligt ihåg sin tid som student i optimeringskursen, och han beslutar sig för att lösa ett kvadratisk optimeringsproblem som hör ihop med detta problem, genom att minimera minsta kvadratavvikelsen som hör till de gjorda mätvärdena. Beräkna den optimala lösningen åt honom, så att han kan hålla båda händerna på ratten.

(Du får utan bevis använda att följande ekvationssystem med obekanta x_1 , x_2 och x_3

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -652 \\ 2178 \\ 4068 \end{bmatrix}$$

har lösningen $x_1 = 1235.5$, $x_2 = 1943$, $x_3 = 2415.5$.)

(8 poäng)

- (5) Antag att x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 är reella tal sådana att

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 8, \quad \text{och} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 &= 16. \end{aligned}$$

Vi vill bestämma det största möjliga värdet för x_5 . Skriv detta som ett optimeringsproblem, och lös det med Lagrangemultiplikatorer. Du skall förklara varför din lösning är en global maximipunkt.

(7 poäng)

- (6) Betrakta följande ickekonvexa optimeringsproblem:

$$(NP) : \begin{cases} \text{minimera} & e^{-(x_1+x_2)} \\ \text{med bivillkoren} & e^{x_1} + e^{x_2} \leq 20, \\ & x_1 \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Visa att (NP) är ett regulärt konvext optimeringsproblem.
 (b) Skriv ner KKT-optimeringsvillkoren och lös dem. Finns det en global optimal lösning till problemet (NP) ? Motivera ditt svar.

(3+6=9 poäng)

- (7) Använd Lagrangerelaxering för att lösa följande optimeringsproblem:

$$\begin{cases} \text{minimera} & x_1 + x_2 \\ \text{med bivillkoren} & \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 1, \\ & x_1 > 0 \\ & x_2 > 0. \end{cases}$$

(5 poäng)

Slut på tentamen.