KTH Matematik

Tentamen i SF1851 Optimeringslära för E.
Lördagen den 25 oktober 2008 kl. 8.00–13.00

Examinator: Ulf Jönsson, tel. 790 84 50

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har rapporterats in. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (**a**) Vi vill skicka ett så stort flöde som möjligt från nod 1 till nod 5 i nätverket i Figur 1. Samtliga bågar i nätverket är enkelriktade med begränsad kapacitet. Vi antar därför att flödet i länkarna är begränsat enligt $0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}$ där x_{ij} betecknar flödet från nod i till nod j och c_{ij} är kapaciteten i motsvarande länk. Formulera maxflödesproblemet som ett linjärt optimeringsproblem på standardform.

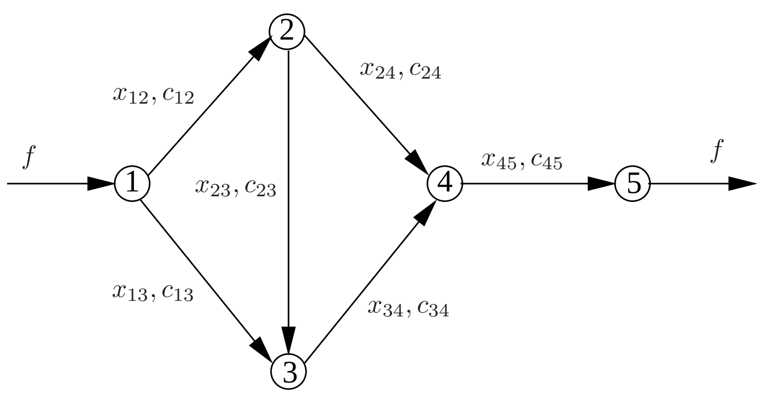

Figure 1: Vi vill maximera flödet f från nod 1 till nod 5.

. . . . (5p)

(**b**) Matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ är anslutningsmatrisen för en viss graf. Bestäm en bas till bildrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ och en bas till nollrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

. . . . (4p)

2. Bestäm med valfri metod, till exempel nollrumsmetod, samtliga lösningar till följande två kvadratiska optimeringsproblem

(**a**)

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 - 1)^2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

.... (5p)

(**b**)

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 - 1)^2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{array}$$

.... (5p)

3. (**a**) Bestäm samtliga lokala minpunkter till den tvådimensionella funktionen

$$f(\mathbf{x}) = (x_1^2 - 1)^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

.... (5p)

(**b**) Betrakta optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & x_1^3 - x_1^2x_2 \\ \text{då} & x_1^4 + 2x_2^4 \leq 4 \\ & 5x_1^4 + x_2^4 \leq 6 \end{array}$$

Vilka av följande punkter uppfyller KKT-villkoren?

(*i*) $(x_1, x_2) = (-1, 1)$,

(*ii*) $(x_1, x_2) = (1, -1)$,

Du måste redogöra dina beräkningar. .... (6p)

4. Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ \text{då} & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8 \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

(**a**) Bestäm dualen och avgör vilken av nedanstående figurer som illustrerar en isokostlinje och det tillåtna området för det duala problemet. Motivera svaret.

.... (4p)

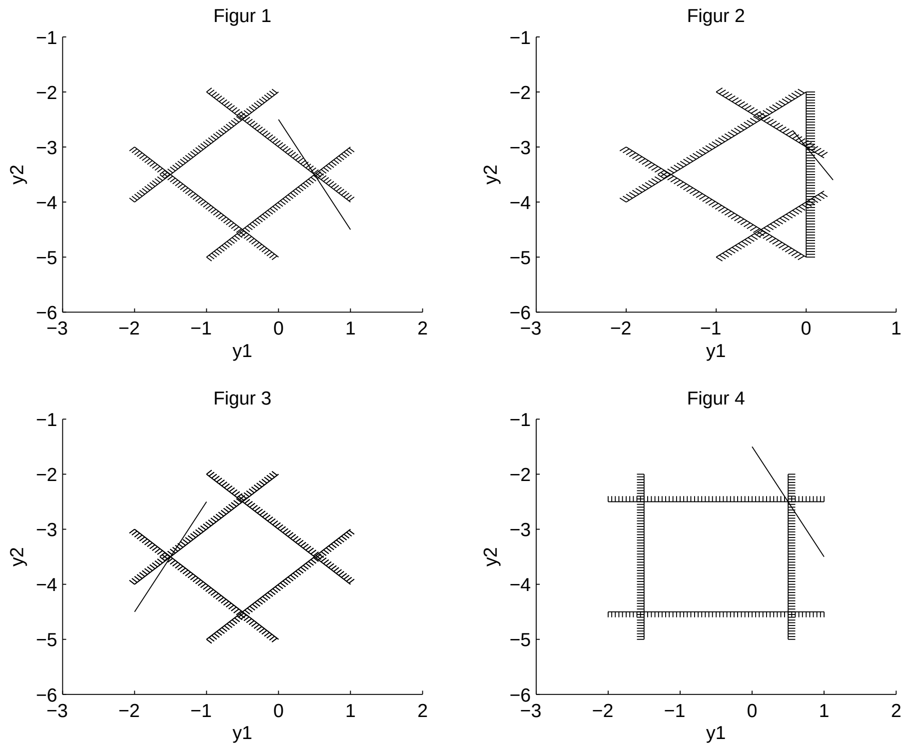

Figure 2: Tillåtet område samt isokostlinje för fyra LP problem.

(**b**) Vad är duala optimallösningen? ....(2p)

(**c**) Bestäm optimallösningen för det primala problemet i (1)

Ledning: Du kan använda komplementaritetsvillkoren för erhålla lämplig basindexvektor.

....(4p)

5. Vi betraktar ett resursallokeringsproblem inom datakommunikation. För effektivt och rättvist uttnyttjande den tillgängliga kapaciteten väljer man datahastigheterna enligt följande optimeringskriterium

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & \sum_{k=1}^{N} U_k(x_k) \\ \text{då} & \sum_{k=1}^{N} x_k \le c, \\ & x_k \ge 0, \quad k = 1, \ldots, N. \end{array} \tag{2}$$

där

x_k betecknar datahastigheten för källa k, $k = 1, \ldots, N$,

$U_k(\cdot)$ är nyttofunktionen för källa k, $k = 1, \ldots, N$,

c betecknar kapaciteten för kommunikationslänken,

(**a**) Antag att nyttofunktionerna har formen

$$U_k(x_k) = \ln(x_k), \qquad k = 1, \ldots, N$$

Visa att optimeringsproblemet i (2) då ger upphov till en fullständigt rättvis fördelning av kapaciteten i den mening att optimallösningen uppfyller $\hat{x}_k = \frac{c}{N}$, $k = 1, \ldots, N$.

Ledning: Visa att de enkla bivillkoren $x_k \geq 0$ inte kan vara bindande. De kan därför elimineras från (2) varvid problemet blir enklare att lösa.

. . . . (5p)

(**b**) Antag att nyttofunktionerna har formen

$$U_k(x_k) = w_k \frac{x_k^{1-\alpha_k}}{1-\alpha_k}, \qquad k = 1, \ldots, N$$

där $w_k > 0$ och $\alpha_k > 1$. Visa att optimallösningen $\hat{x}$ till optimeringsproblemet (2) uppfyller olikheten

$$\sum_{k=1}^{N} w_k \frac{\hat{x}_k - x_k}{x_k^{\alpha}} \geq 0$$

för varje annan tillåten lösning x. Detta kallas för en α-proportionerligt rättvis optimal lösning.

Ledning: Använd att en konvex funktion underskattas av varje linjär approximation, dvs

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$$

. . . . (5p)

Lycka till!