KTH Matematik

Tentamen i SF1851 Optimeringslära för E.
Fredagen den 9 Januari 2009 kl. 8.00–13.00

Examinator: Ulf Jönsson, tel. 790 84 50

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har rapporterats in. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (**a**) Figur 1 illustrerar en servomotor. Med hjälp av en spänning u styr man vridmomentet som accelererar motorns axel. Om vi låter z_2 beteckna motoraxelns vinkel och z_1 dess vinkelhastighet så får man följande tidsdiskreta model

$$\begin{bmatrix} z_1(t+1) \\ z_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-h} & 0 \\ 1-e^{-h} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-e^{-h} \\ h-1+e^{-h} \end{bmatrix} u(t)$$

där $h > 0$ är en fixerad positiv parameter. Ekvationen ovan visar hur servots tillstånd $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ förändras från tidpunkten t till tidpunkten $t+1$.

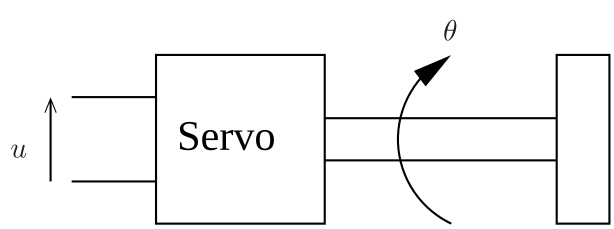

Figure 1: Servomotor.

Antag att servot initialt är i vila med vinkeln $z_2(0) = \theta$ (dvs $\mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 0 & \theta \end{bmatrix}^\mathsf{T}$). Vi vill styra servot så att axeln efter två tidsteg är i vila med vinkeln $z_2(2) = 0$ och att styrningen desutom sker så att följande kostnadsfunktion minimeras

$$z_1(1)^2 + z_2(1)^2 + u(0)^2 + u(1)^2.$$

Låt $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} z_1(1) & z_2(1) & u(0) & u(1) \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Formulera ovenstående styrproblem som ett kvadratisk optimeringsproblem på formen

$$\begin{aligned} \text{miniera} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

där $\mathbf{b}$ kommer att bero på θ.

.... (5p)

(**b**) I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas till bildrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ och en bas till nollrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

.... (4p)

2. I denna uppgiften skall du lösa två kvadratiska optimeringsproblem.

(**a**) Bestäm en optimal lösning till följande kvadratiska optimeringsproblem

$$\text{minimera} \quad 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 44x_1 - 20x_2$$

Är den optimala lösningen unik?

.... (5p)

(**b**) Bestäm en optimal lösning till följande kvadratiska optimeringsproblem med linjära likhetsbivillkor

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{då} & x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1 + x_3 = 1 \end{array}$$

Är den optimala lösningen unik?

.... (6p)

3. Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 - 2x_5 \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 6 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \text{ fri} \end{array} \tag{1}$$

(**a**) Problemet är inte på standardform eftersom x_5 är fri. Ett sätt att överföra problemet till standardform är att lösa ut x_5 som funktion av x_1, x_2, x_3 och x_4 ur första ekvationen och sedan sätta in detta uttryck i målfunktionen och de två sista likhetsbivillkoren. Vi kan då skriva om problemet på standardform i variablerna x_1, x_2, x_3 och x_4. Visa att det reducerade problemet kan skrivas

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 14 \\ \text{då} & -x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ & x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

.... (2p) (**b**) Lös det reducerade problemet från uppgift (**a**) med simplex metoden. Låt x_1 och x_4 vara basvariabler i den första simplexiterationen. .... (6p)

(**c**) Vad är optimala lösningen till (1). .... (2p)

4. Betrakta följande optimeringsproblem

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & (x_1+2)^2 + (x_2+2)^2 \\ \text{då} & x_1 - 2x_2 - 2 \le 0 \\ & 4 - x_1^2 - x_2^2 \le 0 \\ & -x_1 \le 0 \end{array}$$

(**a**) Avgör om någon av (eller båda) punkterna $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ och $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ uppfyller KKT-villkoren. .... (6)

(**b**) Bestäm samtliga punkter som uppfyller KKT-villkoren. Du får använda grafisk metod för att lösa problemet men svaret skall motiveras. .... (4p)

5. I denna uppgiften skall du studera ett problem som uppstår vid effektreglering i mobila radiokommunikationssystem. I det så kallade nedlänkproblemet vill man styra effekten som basstationen sänder till mobil station nr k så att SIR (signal-interferensförhållandet) blir större än en viss given kvantitet γ_k. Man vill samtidigt minimera den totala effekten vilket leder till optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \sum_{k=1}^n x_k \\ \text{då} & \dfrac{g_{k,k}x_k}{1+\sum_{l=1,l\neq k}^n g_{k,l}x_l} \ge \gamma_k, \;\; k=1,\dots,n \\ & x_k \ge 0 \end{array} \tag{2}$$

där

n betecknar antalet mobila radiostationer.

x_k betecknar effekten till mobilstation nr k.

γ_k önskat SIR för mobilstation nr k

$g_{k,l}$ kanalförstärning.

I upplänkproblemet löser man optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & \sum_{k=1}^n y_k \\ \text{då} & \dfrac{g_{k,k}y_k}{1+\sum_{l=1,l\neq k}^n g_{l,k}y_l} \le \gamma_k, \;\; k=1,\dots,n \\ & y_k \ge 0 \end{array} \tag{3}$$

där y_k åter är effekter. Notera att summan i SIR-olikheten i bivillkoret skiljer sig från nedlänkproblemet.

(**a**) Definiera matrisen $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{g_{1,1}}{\gamma_1} & -g_{1,2} & \dots & -g_{1,n} \\ -g_{2,1} & \frac{g_{2,2}}{\gamma_2} & \dots & -g_{2,n} \\ & & \ddots & \\ -g_{n,1} & -g_{n,2} & \dots & \frac{g_{n,n}}{\gamma_n} \end{bmatrix}$.

Visa att nedlänksproblemet i (2) kan skrivas som LP problemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{G}\mathbf{x} \geq \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{4}$$

där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ och $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

Ledning: Skriv om bivillkoren i (2) som linjära olikheter.

.... (4p)

(**b**) Visa att den totala effekten vid optimalititet är lika för nedlänk- och upplänkproblemen, dvs $\sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k$. .... (6p)

Lycka till!