



KTH Matematik

**Tentamen i SF1851 Optimeringslära för E.
Onsdag 16 januari 2008 kl. 8.00–13.00**

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har rapporterats in. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

1. (a) Ett företag har tre fabriker, i städerna A, B och C, och fyra stora kunder, i städerna P, Q, R och S. Vid ett visst tillfälle efterfrågar kunderna följande kvantiteter av företagets produkt: Kunden i P 50 ton, kunden i Q 60 ton, kunden i R 70 ton och kunden i S 40 ton. Företagets tillgång på produkten vid det aktuella tillfället är 70 ton vid fabriken i A, 90 ton vid fabriken i B och 60 ton vid fabriken i C. Transportkostnaderna från fabriker till kunder, i sorten hundralappar per ton, ges av följande tabell:

	P	Q	R	S
A	6	5	6	5
B	9	7	7	7
C	8	7	6	5

Man vill bestämma hur mycket företaget bör transportera från respektive fabrik till respektive kund för att totala transportkostnaden ska minimeras under bivillkoren att kundernas efterfrågan tillgodoses och fabrikernas tillgångar ej överskrids. Företagets transportchef föreslår blixtnabbt följande lösning (i sorten ton):

	P	Q	R	S
A	50	20		
B		40	50	
C			20	40

Visa att denna lösning faktiskt är optimal!

Du ska även formulera problemet som ett LP-problem på standardform, dvs minimera $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ då $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Ange $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$, samt en optimal lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till detta LP-problem. (5p)

(b) I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas till vart och ett av de fyra fundamentala underrummen till $\mathbf{A}$, dvs till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\top)$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$ (4p)

2. Betrakta följande LP-problem: (Observera att det är ett maximeringsproblem.)

$$\begin{array}{rcllcl} \text{maximera} & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 90, \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 60, \\ & x_1 & & & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & & & \geq & 0, \\ & & & & & x_3 & & & \geq & 0, \\ & & & & & & & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

- (a) Använd Simplexmetoden för att bestämma en optimal lösning till problemet. Starta med slackvariablerna som basvariabler. Ange tydligt din erhållna optimala lösning. (6p)
- (b) Din optimala lösning är inte unik, eller hur? Bestäm ytterligare en optimal lösning till problemet. (3p)

3. Låt i denna uppgift $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Visa att ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ inte har någon lösning. (1p)
- (b) Bestäm *en* vektor $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ som minimerar $|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|^2$ (3p)
- (c) Bestäm den unika vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ som är kortast (dvs har minst norm) bland alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ som minimerar $|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|^2$ (4p)

4. Betrakta följande icke-linjära optimeringsproblem i variablerna x_1 och x_2 :

$$\begin{array}{rcl} \text{minimera} & 8x_1^2 - 6x_2^2 \\ \text{då} & 8 \leq 2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 12. \end{array}$$

- (a) Formulera KKT-villkoren för detta problem. (2p)
- (b) Bestäm samtliga lösningar till dessa KKT-villkor. (6p)

5. (a) Starta i punkten $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1)^T$ och utför en iteration med Newtons metod för att minimera funktionen $f(\mathbf{x}) = \frac{8}{(|x_1| + 1)(|x_2| + 1)} - x_1 - 3x_2$ utan några bivillkor. (5p)
- Ledning:* I omgivningen av $\mathbf{x}^{(1)}$ är $f(\mathbf{x}) = \frac{8}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} - x_1 - 3x_2$.
- (b) Antag att man fortsätter itererandet. Kommer iterationspunkterna som genereras av Newtons metod att konvergera mot en global minpunkt? Motivera svaret ordentligt! (3p)

6. De sex givna konstanterna $r_1, r_2, r_3, k_1, k_2, k_3$ uppfyller dels att $r_1 + r_2 + r_3 = 0$, dels att $k_1 + k_2 + k_3 = 0$.

Givet dessa sex konstanter så vill man välja elementen a_{ij} i en 3×3 -matris A på ett sådant sätt att kvadratsumman av samtliga element (dvs $\sum \sum a_{ij}^2$) blir så liten som möjligt under bivillkoren att summan av elementen i den i :te raden blir $= r_i$, för $i = 1, 2, 3$, och summan av elementen i den j :te kolumnen blir $= k_j$, för $j = 1, 2, 3$.

Visa att elementen i den sökta matrisen $\mathbf{A}$ ska väljas enligt formeln

$$a_{ij} = \frac{r_i + k_j}{3}, \text{ för } i = 1, 2, 3 \text{ och } j = 1, 2, 3. \quad \dots\dots\dots (8p)$$

Lycka till!