



**Tentamen i SF1851 Optimeringslära för E.
Fredag 23 oktober 2009 kl. 08.00–13.00**

Examinator: Per Enqvist, tel. 790 62 98

Tillåtna hjälpmedel: Penna, sudd och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut

Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a).

Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23-24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta i så fall examinator.

Numrera sidorna och skriv namn på varje blad. Behandla endast en uppgift per blad.

1. (a) Vi har två stycken motstånd med okända resistanser R_1 och R_2 som vi vill skatta genom att använda minsta kvadratmetoden.

Vi har ett batteri på 12 Volt som vi ska använda och en amperemätare. Först kopplar vi in det första motståndet till batteriet och mäter strömmen 0.3 Ampere. Sedan kopplar vi in det andra motståndet till batteriet och mäter strömmen 0.4 Ampere. Till sist parallellkopplar vi de två batterierna och ansluter till batteriet, varvid vi mäter upp strömmen 0.6 Ampere (innan strömmen delar upp sig på de två motstånden).

Ställ upp det linjära minsta-kvadrat problemet för att bestämma de båda resistanserna, och lös detta problem. (5p)

Ledning: det kan vara bra att använda $L_1 = 1/R_1$ och $L_2 = 1/R_2$ som variabler.

- (b) Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

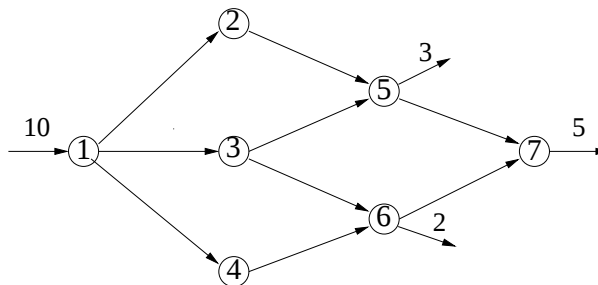
Bestäm nollrum och bildrum till $\mathbf{A}$.

Ligger vektorn

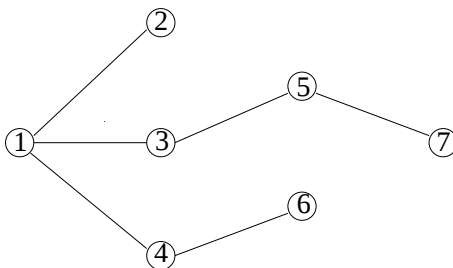
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$$

i bildrummet till $\mathbf{A}^T$? (4p)

2. Betrakta följande nätverksproblem:



- (a) Bestäm anslutningsmatrisen för detta problem och vektorn med externa flöden, d.v.s. matrisen $\mathbf{A}$ och vektorn $\mathbf{b}$ sådana att $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ser till att vi har flödesbalans i varje nod. Låt $\mathbf{x} = (x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{25}, x_{35}, x_{36}, x_{46}, x_{57}, x_{67})^T$.
 (3p)
- (b) Bestäm baslösningen som hör till det spännande trädet i figuren nedan. Är den tillåten?



- (2p)
- (c) Antag att kostnaderna är $c_{12} = 2$, $c_{13} = 3$, $c_{14} = 1$, $c_{25} = 4$, $c_{35} = 2$, $c_{36} = 3$, $c_{46} = 1$, $c_{57} = 3$, $c_{67} = 2$.
 Använd nätverksversionen av Simplexalgoritmen för att avgöra om lösningen i (b) är optimal. Om den inte är det ska du bestämma en optimal lösning.
 (5p)

3. (a) Betrakta följande linjära optimeringsproblem:

$$(P) \quad \begin{bmatrix} \min_x & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{då} & x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{bmatrix}.$$

Lös (P) med Simplex-algoritmen.

Börja med basindexmängden $\beta = \{1, 2\}$, d.v.s. x_1 och x_2 som basvariabler. (4p)

- (b) Skriv ut explicit vad dualen (D) till (P) är. (2p)

- (c) Det tillåtna området till dualen är ett område i $\mathbb{R}^2$. Rita en figur över detta område. (2p)

- (d) Bestäm lösningen till detta duala problem.

Lösningen till dualen får bestämmas på godtyckligt sätt, så länge som ni verifierar att punkten ni erhåller verkligen är optimal. (2p)

4. Betrakta det kvadratiske optimeringsproblemet

$$(QP) \quad [\text{minimera} \quad f(x)],$$

där $f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x$ och H, c ges av

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Optimeringsproblemet (QP) kan lösas enkelt, men skulle även kunna lösas m.h.a. gradientmetoden. Vi kommer att betrakta detta grafiskt. I figuren på sista sidan är ett antal nivåkurvor till f utritade. Antag att vi börjar i punkten $x^{(0)} = (1.41, 0.54)$ som markerats med en ring i grafen. Rita in i grafen hur gradientmetoden skulle iterera sig fram de tre första iterationerna om man antog att exakt linjesökning användes. Om det behövs kan ni rita in flera nivåkurvor i figuren.

Beskriv med ord hur man ser vilken riktning som bestäms av gradientmetoden och hur man ser hur långt i denna riktning man ska gå.

Bifoga sista sidan med grafen till dina lösningar. (3p)

Anmärkning: Notera att skalan på de båda axlarna är densamma.

- (b) Visa med hjälp av LDL^T -faktorisering att problemet faktiskt är konvext. (2p)

- (c) Bestäm den exakta lösningen till det kvadratiske (QP) problemet. (2p)

- (d) Antag att man även införde ett bivillkor $Ax = b$, där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

Illustrera detta bivillkor i grafen och bestäm med hjälp av nollrumsmetoden eller Lagrangemetoden den optimala lösningen till detta optimeringsproblem.

..... (3p)

5. Betrakta det ickelinjära optimeringsproblemet

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \text{minimera} & f(\mathbf{x}) \\ \text{då} & x \in \mathcal{F} \end{array} \right]$$

där målfunktionen ges av $f(\mathbf{x}) = e^{x_1+x_2} - x_1 - 3x_2$, och det tillåtna området ges av $\mathcal{F} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ där

$$\mathcal{C}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : e^{x_1} - x_2 \geq 0\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : e \cdot x_1^2 - x_2 \leq 0\}.$$

- (a) Är målfunktionen konvex ?
 Är det tillåtna området konvext ?
 Är detta ett konvext optimeringsproblem ?
 Motivera dina svar. (3p)
- (b) Om vi i en generell situation har att en mängd $\mathcal{F}$ ges av snittet av två andra mängder $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$, känner ni då till något kriterium för att mängden $\mathcal{F}$ ska vara konvex? Är detta kriterium nödvändigt eller tillräckligt ? (2p)
- (c) Uppfyller punkten $\mathbf{x}^{(c)} = (0, 0)$ KKT-villkoren ? Kan vi säga att denna punkt är ett lokalt optimum baserat på vad vi bestämt hittills? (2p)
- (d) Uppfyller punkten $\mathbf{x}^{(d)} = (1, e)$ KKT-villkoren? Kan vi säga att denna punkt är ett lokalt optimum baserat på vad vi bestämt hittills? (2p)
- (e) Finns det någon inre punkt som uppfyller KKT-villkoren? (2p)

Lycka till!

Riv ur och bifoga denna sida till dina lösningar.

Namn:

Sidnummer

