b) Genomför en iteration med Newtons metod

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>sökriktning</u> $x \nearrow d$

$$F(x^{(k)})\, d = -\nabla f(x^{(k)}) \qquad (*)$$

$$\left(\nabla h^T \nabla h + \sum_i h_i H_i\right) d = -\nabla h^T h$$

återstår att beräkna $\sum_i h_i(x)\, H_i(x)$ för att kunna lösa $(*)$, eftersom övriga termer beräknats i a-uppgiften.

$H_i(x^{(1)})$ är Hessianen av h_i i punkten $x^{(1)}$.

$$H_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial h_i^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial h_i^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial h_i^2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$H_i = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ för $i = 1, 2, 3, 4$ oberoende av vad x är.

Så

$$\sum_{i=1}^{4} h_i(x^{(1)})\, H_i(x^{(1)}) = (4-2-1+3)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

dvs

$$\left(\nabla h^T \nabla h + \sum_i h_i H_i\right) d = -\nabla h^T h \quad \text{ger}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right] d = -\begin{pmatrix} 32 \\ 16 \end{pmatrix} \Rightarrow d = -\begin{pmatrix} 32/56 \\ 16/40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/7 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

<u>steglängd</u>, $f(x^{(1)} + td) < f(x^{(1)})$

$$\left.\begin{array}{l} f(x^{(1)}) = 15 \\ f(x^{(1)} + 1 \cdot d) \approx 0{,}91 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 1.$$

<u>Uppdatera</u>

$$x^{(2)} = x^{(1)} + td = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -4/7 \\ -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

c) Är (P) ett konvext optimeringsproblem?

Tillåtna området är en konvex mängd ($x \in \mathbb{R}^2$).

Behöver visa att $F(x) \succeq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}^2$ (tillåtna området)

$$F(x) = \nabla h(x)^T \nabla h(x) + \sum_i h_i(x) H_i(x) = \nabla h(x)^T \nabla h(x) + \left(\sum_i h_i(x)\right)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{2^2 \begin{bmatrix} (x_1+2) & (x_1-2) & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & (x_2-2) & x_2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1+2 & x_2 \\ x_1-2 & x_2 \\ x_1 & x_2-2 \\ x_1 & x_2+2 \end{bmatrix}}_{\succeq 0 \text{ ty } M^TM \succeq 0 \text{ för alla matriser } M.} + \left(4x_1^2 + 4x_2^2 + 2\cdot(8-8)\right)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 4\begin{bmatrix} 4x_1^2+8 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 4x_2^2+8 \end{bmatrix} + 4\,(x_1^2 + x_2^2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 16\begin{bmatrix} x_1(x_1+2) & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2(x_2+2) \end{bmatrix} + (x_1^2 + x_2^2)\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

så $F(x) \succeq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ f är konvex på hela $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ (P) är ett konvext optimeringsproblem