KTH Matematik

Hemuppgift 2, SF1861 Optimeringslära för T, VT-10

Kursansvarig: Per Enqvist, tel: 790 6298, *penqvist@math.kth.se*.

Assistenter: Mikael Fallgren, *werty@kth.se*,
Amol Sasane, *sasane@math.kth.se*.

I denna uppgift är samarbete tillåtet i grupper om högst två personer.
Endast en rapport per grupp skall lämnas in. Matlabkod och utskrifter ska bifogas.
Svaren på frågorna skall finnas i rapporten, inte i Matlabkoden eller utskrifter.
Det är inte tillåtet att kopiera någon annan grupps rapport!
Ange namn, personnummer och e-postadress på rapportens framsida.
Rapporten, utskriven på papper, lämnas till någon av ovannämnda personer senast torsdagen den 29 april 2009 på föreläsningen.
Vissa studenter kommer, delvis slumpmässigt, att väljas ut för enskild muntlig redovisning av uppgifterna. Kallelse sker via e-post, så kontrollera regelbundet denna.
Korrekt löst och redovisad uppgift ger fyra hemtalspoäng.

---

1. Denna laboration syftar dels till att introducera strukturoptimering, dels till att du skall få lösa ett linjärt optimeringsproblem med hjälp av Matlab.

Strukturoptimering handlar om att dimensionera mekaniska strukturer på ett "automatiskt" sätt, i den mening att vi först ställer upp de krav vi har på strukturen, exempelvis i form av olika hållfasthetskrav, och sedan låter datorn, via en FEM-modell, räkna ut den "bästa" strukturen. Med "bästa" kan till exempel menas den struktur som väger minst av alla de strukturer som uppfyller kraven.

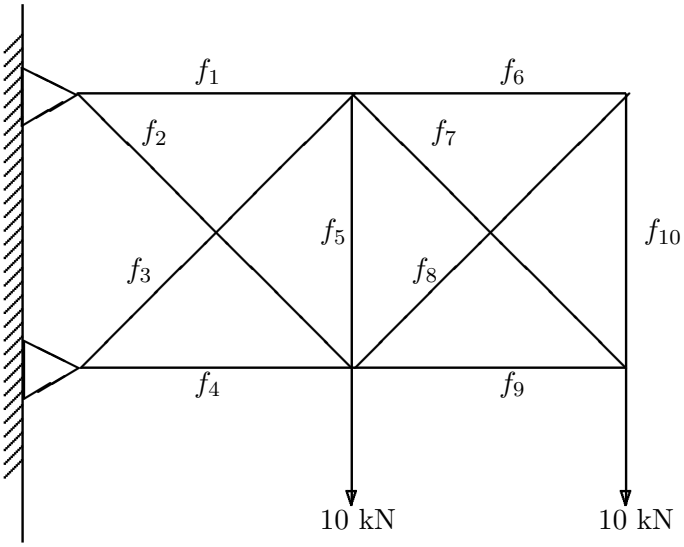
Vi skall i denna laboration betrakta en modell av ett enkelt tvådimensionellt fackverk. Vi kommer bara att behandla ett lastfall (i taget), dvs kraven som vi ställer gäller för en specifik last. Det faktum att vi bara har ett lastfall, i kombination med valet av målfunktion och bivillkor, och en liten gnutta list, gör att vi kan formulera och lösa ett visst designproblem (att bestämma optimala tvärsnittsareor på stängerna) som ett *linjärt* optimeringsproblem.

Betrakta alltså fackverket i figur 1, med tio stycken stänger. De två noderna längst till vänster är fixerade (i väggen) så strukturen har åtta frihetsgrader, nämligen förskjutningarna i horisontal- resp vertikalled av de fyra icke-fixerade noderna. I de nedre noderna appliceras givna yttre krafter, som måste balanseras av normalkrafter i stängerna och reaktionskrafterna i de givna stöden. Låt f_j beteckna normalkraften i stång j ($f_j > 0$ för drag och $f_j < 0$ för tryck). Eftersom kraftjämvikt måste råda i varje nod får vi, t.ex. för den övre mitten-noden i horisontalriktningen att

$$f_1 + f_3/\sqrt{2} - f_6 - f_7/\sqrt{2} = 0,$$

och i vertikalriktningen

$$f_3/\sqrt{2} + f_5 + f_7/\sqrt{2} = 0.$$



Figur 1: Ett fackverk med tio stänger.

Om vi gör motsvarande för alla de fyra icke-fixerade noderna får vi ett system av ekvationer som kan skrivas på formen

$$\mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{p}, \tag{1}$$

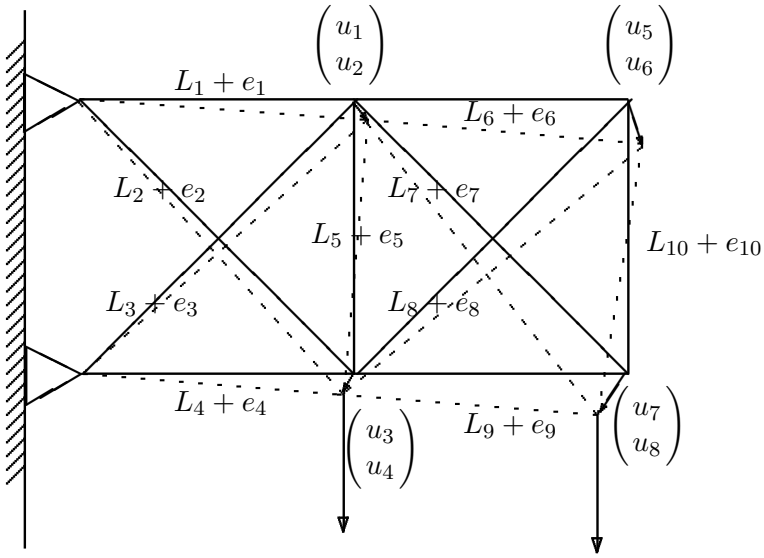
där $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_{10})^\mathsf{T}$ = en vektor med normalkrafterna i stängerna,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma & 0 & 0 & -1 & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 1 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\gamma & -1 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix},$$

där $\gamma = 1/\sqrt{2}$.

På grund av den yttre lasten kommer noderna att förskjutas och stängerna att förlängas (eller förkortas). Låt vektorn $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_{10})^\mathsf{T}$ innehålla de 10 stängernas förlängningar (*elongations*) och låt vektorn $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_8)^\mathsf{T}$ innehålla de fyra noderna förskjutningar i horisonatal- resp vertikalled. I figur 2 illustreras den deformerade strukturen och koordinatsystemet som hör till förskjutningsvektorn $\mathbf{u}$. Vektorn $\mathbf{u}$ har alltså dimensionen 8, lika med antalet frihetsgrader i strukturen. Relationen mellan $\mathbf{e}$ och $\mathbf{u}$ ges, under antagandet att förskjutningarna är små i förhållande till stängernas längd, av

$$\mathbf{e} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{u}. \tag{2}$$



Figur 2: Illustration av deformerat fackverk.

Vidare ger Hookes lag att

$$f_j = \left(\frac{Ex_j}{L_j} \right) e_j, \tag{3}$$

där E är materialets elasticitetsmodul, L_j är stång j:s längd och x_j dess tvärsnittsarea. Vi använder beteckningen x_j för att markera att stängernas tvärsnittsareor utgör våra *designvariabler* vid optimeringen, och låter $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ beteckna designvariabelvektorn, d.v.s. vektorn som består av tvärsnittsareorna för de n stängerna. På vektorform kan vi skriva Hookes lag

$$\mathbf{f} = \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{e}, \tag{4}$$

där $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ är en diagonalmatris med diagonalelementen Ex_j/L_j, för $j = 1 \ldots 10$.

Om vi kombinerar ovanstående ekvationer får vi

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{e} = \mathbf{R}\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{5}$$

där $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{R}^\mathsf{T}$ är strukturens *styvhetsmatris*.

Inom strukturoptimering är det vanligt att man arbetar med ovanstående relation, antingen explicit eller implicit via en FEM-modell, och sedan ställer krav på t.ex. förskjutningarna, t.ex. att $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{u} \leq b$ för olika val av $\mathbf{a}$ och b. Med detta skrivsätt kan man t.ex. ställa krav på att spänningarna inte får bli för stora eller att förskjutningar i vissa riktningar inte får bli för stora.

Vi skall i denna laboration bestämma tvärsnittsareorna x_j på ett sådant sätt att strukturens vikt minimeras, givet att spänningarna i stängerna under ett givet lastfall inte får bli för stora. Variabler i optimeringsproblemet är stängernas tvärsnittsareor, nodernas förskjutningar och normalkrafterna i stängerna, dvs $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{f}$.

Antag att spänningen i stängerna högst får bli $\sigma^{\max}$ och låt oss för enkelhets skull anta att denna givna gräns gäller för både tryck och drag och är lika för alla stänger.

Detta krav kan skrivas $-\sigma^{\max} \leq \dfrac{f_j}{x_j} \leq \sigma^{\max}$, eller bättre $-x_j\sigma^{\max} \leq f_j \leq x_j\sigma^{\max}$.

Den sistnämnda dubbla olikheten är korrekt även om $x_j = 0$, ty om en stångs tvärsnittsarea är noll så skall kraften i stången också vara noll.

Strukturens vikt ges av $\sum_{j=1}^{10} \rho L_j x_j$, där ρ är materialets densitet.

Problemet att minimera strukturens vikt under kravet att spänningarna inte blir för stora kan alltså skrivas på följande form: (där variablerna är $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{f}$)

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{minimera} & \displaystyle\sum_{j=1}^{10} \rho L_j x_j & & & \textit{vikt} \\
\text{då} & \mathbf{Rf} & = & \mathbf{p}, & \textit{kraftjämvikt} \\
 & \mathbf{f} & = & \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}, & \textit{Hookes lag och geometri} \\
 & f_j & \leq & x_j\sigma^{\max}, \quad j = 1,\ldots,10 & \textit{spänningsvillkor drag} \\
 & -f_j & \leq & x_j\sigma^{\max}, \quad j = 1,\ldots,10 & \textit{spänningsvillkor tryck} \\
 & x_j & \geq & 0, \quad j = 1,\ldots,10 & \textit{icke-negativa areor},
\end{array}
\tag{6}
$$

En mycket trevlig (och ganska oväntad) egenskap hos detta problem (6) är att om vi helt fräckt tar bort bivillkoren $\mathbf{f} = \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$ och bestämmer optimala $\mathbf{x}$ och $\mathbf{f}$ till "resten" av problemet, så kan vi *därefter* bestämma en vektor $\mathbf{u}$ sådan att bivillkoren $\mathbf{f} = \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$ blir uppfyllda. Vi kan alltså börja med att lösa följande reducerade problem (utan variablerna $\mathbf{u}$ och utan bivillkoren $\mathbf{f} = \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$) :

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{minimera} & \displaystyle\sum_{j=1}^{10} \rho L_j x_j & & & \\
\text{då} & \mathbf{Rf} & = & \mathbf{p}, & \\
 & f_j & \leq & x_j\sigma^{\max}, & j = 1,\ldots,10 \\
 & -f_j & \leq & x_j\sigma^{\max}, & j = 1,\ldots,10 \\
 & x_j & \geq & 0, & j = 1,\ldots,10.
\end{array}
\tag{7}
$$

I detta problem (7) kan vi bortse från faktorn ρ, ty den kommer inte att påverka de optimala värdena på $\mathbf{x}$ och $\mathbf{f}$. Vidare ser vi att bivillkoren $x_j \geq 0$ inte behöver stå med, eftersom dessa villkor ändå blir uppfyllda som en konsekvens av de övriga bivillkoren i problemet (eller hur?). Vi kan alltså betrakta följande linjära optimeringsproblem:

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{minimera} & \displaystyle\sum_{j=1}^{10} L_j x_j & & & \\
\text{då} & \mathbf{Rf} & = & \mathbf{p}, & \\
 & f_j & \leq & x_j\sigma^{\max}, & j = 1,\ldots,10 \\
 & -f_j & \leq & x_j\sigma^{\max}, & j = 1,\ldots,10.
\end{array}
\tag{8}
$$

Numeriska värden och sorter på några konstanter i problemet:

$E = 200$ kN/mm^2, $\sigma^{\max} = 0.5$ kN/mm^2,

$L_j = 1000$ mm, för $j = 1, 4, 5, 6, 9, 10$, $L_j = \sqrt{2} \cdot 1000$ mm, för $j = 2, 3, 7, 8$.

Komponenter p_i i lastvektorn $\mathbf{p}$ mäts i sorten kN.

Använd följande sorter på dina variabler: mm^2 för x_j, mm för u_i, kN för f_j.

Nu kommer vi (äntligen) till vad du ska göra.

(a) Lös LP-problemet (8) med Matlabs lösare `linprog`. Skriv kommandot `help linprog` på kommandoraden i Matlab, så får du hjälp med syntaxen för anropet till `linprog` som finns i "Optimization Toolbox". Om du inte har denna "toolbox" på din dator kan du använda LP-lösaren `alps` som finns att ladda ner från kursens hemsida. Lös problemet med några olika lastfall, bland annat det ovanstående samt åtminstone ett till för vilket du inser vad svaret bör bli. (Kontrollera att svaret blir det rätta!) Utöver ovanstående testfall skall du också lösa problemet med

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8)^\mathsf{T},$$

med $p_i = 10 - n_i$ där n_i betecknar den i:te siffran i ditt personnummer.
(Exempel: Med personnumret 830912-7456 så blir $\mathbf{p} = (2, 7, 10, 1, 9, 8, 3, 6)^\mathsf{T}$.)
Sorten på varje p_i är kN. På kursens hemsida kan du ladda ner en matlabkod som ritar upp strukturen, givet en vektor $\mathbf{x}$. Skriv en kort rapport där du redovisar vilka problem du löst, samt dina erhållna resultat. Bifoga din matlabkod och plotbilder.

Dina erhållna optimala tvärsnittsareor ska redovisas dels i plotbilder, dels i *siffror*!

(b) Låt $\hat{\mathbf{x}}$ och $\hat{\mathbf{f}}$ vara de optimala tvärsnittsareor och stångkrafter du beräknat för personnummerslasten och låt vektorn $\hat{\mathbf{u}} \in I\!R^8$ ges av en skalär t gånger vektorn med dualvariabler (även kallade lagrangemultiplikatorer) svarande mot bivillkoren $\mathbf{Rf} = \mathbf{p}$ i ditt LP-problem. Kontrollera numeriskt (med Matlab) att det går att välja denna skalär t så att $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{D}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{R}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{u}}$, dvs så att de bivillkor vi bortsåg från ovan faktiskt blir uppfyllda. Redovisa räkningarna och ange värdet på t.

Detta medför att $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{f}}$, $\hat{\mathbf{u}}$ är en optimal lösning till problemet (6)!

Lycka till!