Optimeringslära för T (SF1861)

1. Kursinformation
2. Exempel på optimeringsproblem
3. Introduktion till linjärprogrammering

Kursinformation

- Kurs i grundläggande optimeringslära samt linjär algebra.
- Ämnet tillämpas inom till exempel
  - Telekommunikation, t.ex. basstationsplacering
  - Signalbehandling, t.ex. taligenkänning
  - Reglerteknik, t.ex. banplanering
  - Ekonomi, t.ex. portföljplanering
  - Logistik, t.ex. product chain management
  - Medicin, t.ex. strålningsterapiplanering

Lärare

- Per Enqvist (Email: penqvist@math.kth.se)
- Johan Markdahl (Email: markdahl@math.kth.se)
- Johan Thunberg (Email: jthu02@kth.se)

Kursmaterial

Följande material säljs på Matematiks studentexpedition, Lindstedtsv 25.

- Optimization, av Amol Sasane och Krister Svanberg.
- Exempelsamling i Optimeringslära för T.

Kommentar till OH bilderna

- Till de flesta föreläsningarna kommer det att finnas OH-bilder (tillgängliga efter föreläsningen på hemsidan).
- Dessa sammanfattar föreläsningen samt ger vissa komplement till kurslitteraturen.
- Det finns också läsanvisningar längst bak i OH-häftet.
- OH-bilderna är inte ekvivalenta med föreläsningarna.
- Jag passar på att tacka Ulf Jönsson för arbetet han lagt ner på OH-bilderna.

Kursens hemsida

På kursens hemsida

http://www.math.kth.se/optsyst/grundutbildning/kurser/SF1861/

finns

1. preliminärt schema
2. läsanvisningar
3. hemtalen och information om inlämningsdatum kommer att anslås på kursens hemsida.

Hemuppgifter (HEM1 1.5 hp)

Tre frivilliga hemuppgifter i Matlab delas ut under kursens gång.

- Hemtal 1: Linjär algebra.
- Hemtal 2: Strukturoptimering.
- Hemtal 3: Ljuddämparoptimering - i samarbete med Ljud och Vibrationer.

Regler för hemtalspoäng

Belöning för $0 \leq X \leq 12$ hemtalspoäng

- $X < 5$ ger ingen belöning.
- $5 \leq X \leq 8$ medför att deluppgift 1.(a) ej behöver lösas på tentamen. De 5 tentamenspoängen för 1.(a) erhålls ändå. Denna bonus gäller under ett år.
- $X \geq 9$ medför att uppgift 1 ej behöver lösas på tentamen. De $5 + 4 = 9$ tentamenspoängen för uppgift 1 erhålls ändå. Denna bonus gäller för all framtid.

Den student som erhåller minst 9 hemtalspoäng blir inrapporterad godkänd på momentet HEM1.
Den student som INTE erhåller minst 9 hemtalspoäng blir ändå inrapporterad godkänd på momentet HEM1 den dag han/hon blir godkänd på tentamen och får momentet TEN1 inrapporterat.

Tentamen

Maximalt resultat på tentamen är 50 poäng. Preliminära betygsgränser:

Betyg	A	B	C	D	E	FX
Poäng	43-50	38-42	33-37	28-32	25-27	23-24

- Vid tentamen delas en kortfattad formelsamling ut. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Ingen räknare på tentan!
- Ordinarie tentamen är Tisdagen den 24:e maj.
- Anmälan till tentamen är obligatorisk och kan göras via ”Mina Sidor” mellan den 18:e april och 8:e maj.

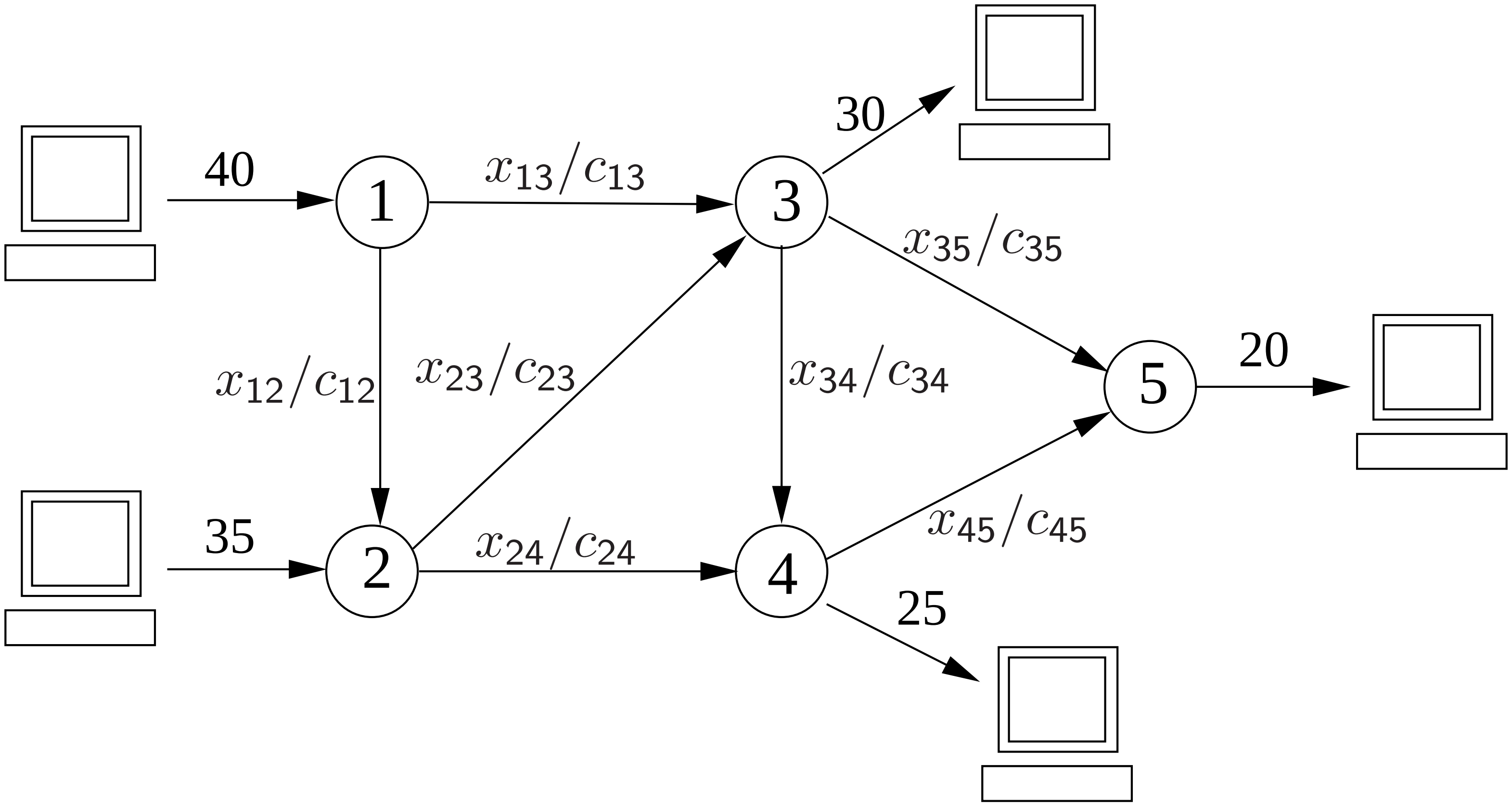
Kursmoment

1. Linjär optimering
2. Linjär algebra
3. Kvadratisk optimering
4. Olinjär optimering utan bivillkor
5. Olinjär optimering med bivillkor

Tre exempel på optimeringsproblem

1. Nätverksoptimering
   - Linjärprogrammeringsproblem
2. Linjär regression (modellanpassing)
   - Kvadratiskt optimeringsproblem
3. Trafikreglering i kommunikationssystem
   - Olinjärt optimeringsproblem med bivillkor

Nätverksoptimering



Data skall skickas från datorer i nod 1 och 2 till datorer i nod 3, 4, och 5.

Kostnaden för trafik i länken mellan nod i och j är c_{ij} Kr/Kbyte.
Datatrafiken från nod i till nod j betecknas x_{ij} och mäts i Kbyte.

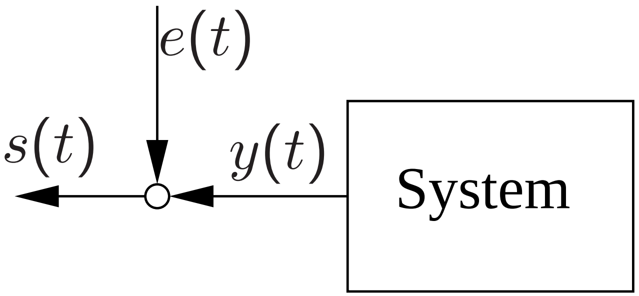
Vi vill minimera kostnaden för datatrafiken.

Nätverksoptimering

Resulterande optimeringsproblem

$$
\begin{aligned}
\text{minimera} \quad & \sum_{\text{alla bågar}} c_{ij} x_{ij} \\
\text{då} \quad & x_{12} + x_{13} = 40 \\
& -x_{12} + x_{23} + x_{24} = 35 \\
& -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} = -30 \\
& -x_{24} - x_{34} + x_{45} = -25 \\
& -x_{35} - x_{45} = -20 \\
& x_{ij} \geq 0, \ \text{alla bågflöde}
\end{aligned}
$$

Linjär regression (modellanpassing)



Problem: Anpassa en linjär regressionsmodell till mätdata.

$$\text{Regressionsmodellen :} \quad y(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(t)$$

- $\psi_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$ är regressorerna (kända funktioner)
- $\alpha_j = j = 1, \ldots, n$ är modellparametrarna (skall bestämmas)
- $e(t)$ mätbrus (ej känd)
- $s(t)$ observationer - uppmätta data.

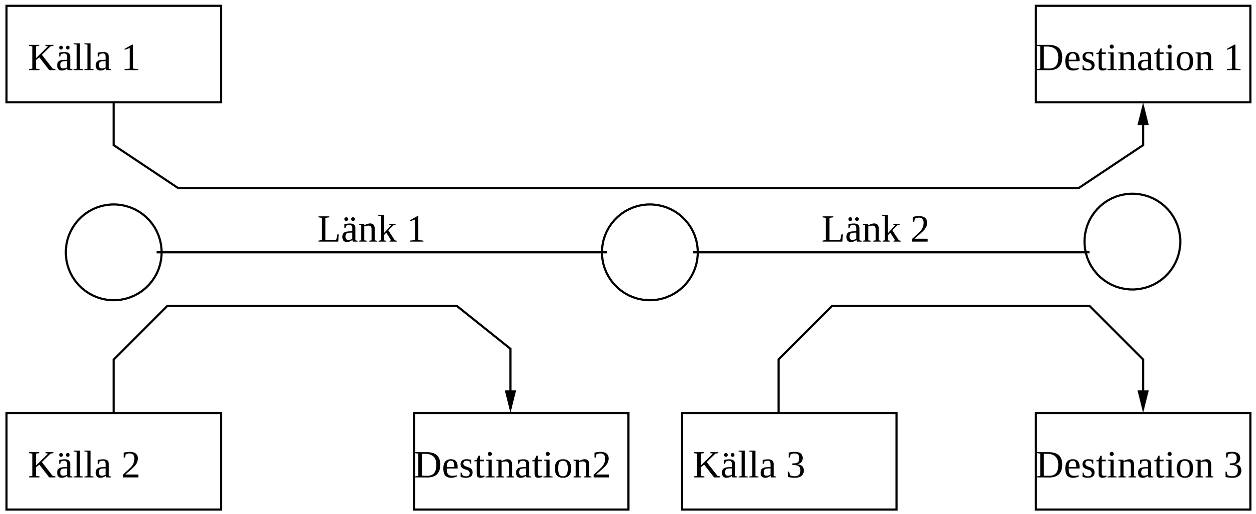
Idé för modellanpassning: Minimera kvadratsumman av prediktionsfelen

$$\text{minimera}\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\psi_j(t)-s(t_i))^2$$

- Detta är ett minsta kvadratproblem.
- Speciell typ av kvadratiskt optimeringsproblem.

Trafikreglering i kommunikationssystem

Vi betraktar ett kommunikationsnätverk bestående av två länkar. Tre källor skickar data över nätverket till tre olika destinationer.



- Källa 1 använder båda länkarna.
- Källa 2 använder länk 1.
- Källa 3 använder länk 2.

- Länk 1 har kapaciteten 2 (normaliserad storhet [datamängd/sek])
- Länk 2 har kapaciteten 1
- De tre källorna sänder med datahastigheterna x_r, $r = 1, 2, 3$.
- De tre källorna har varsin nyttofunktion $U_r(x)$, $r = 1, 2, 3$. Ett vanligt val av nyttofunktion är $U_r(x_r) = w_r \log(x_r)$.

För effektivt och rättvist uttnyttjande den tillgängliga kapaciteten väljer man datahastigheterna enligt följande optimeringskriterium

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & U_1(x_1) + U_2(x_2) + U_3(x_3) \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Introduktion till linjärprogrammering (LP)

1. Formulering av exempelproblem
2. Tillåten lösning och optimalitet
3. Grafisk illustration av tillåtenhet och optimalitet
4. Introduktion av simplexmetoden
5. Några höjdpunkter inom LP teorin

Formulering av exempelproblem

- Ett företag producerar två produkter P_1 och P_2
- Maskinerna M_1 och M_2 används vid produktion av såväl P_1 som P_2
- Produktionskapaciteten för maskinerna [dygn/enhet]:

M_1	$a_{11} = \frac{1}{40}$	$a_{12} = \frac{1}{60}$
M_2	$a_{21} = \frac{1}{50}$	$a_{22} = \frac{1}{50}$
	P_1	P_2

- Priset för produkterna [KKr/enhet]:

produkt	pris
P_1	$c_1 = 200$
P_2	$c_2 = 400$

- Mål: Bestäm produktionsvolymen så att företagets profit maximeras.

Låt

- x_k antal enheter av produkt P_k som produceras per dygn, $k = 1, 2$.

Den maximala profiten erhålls som lösningen till följande optimeringsproblem:

$$
\begin{aligned}
\text{maximera} \quad & 200x_1 + 400x_2 \\
\text{då} \quad & \tfrac{1}{40}x_1 + \tfrac{1}{60}x_2 \leq 1 \\
& \tfrac{1}{50}x_1 + \tfrac{1}{50}x_2 \leq 1 \\
& x_k \geq 0,\ k = 1, 2
\end{aligned}
$$

Kompakt formulering:

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & c^T x \\ \text{då} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

där

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{50} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Optimeringsproblemet (1) är ett linjärprogrammeringsproblem:

- Linjär kostnadsfunktion $c^T x$
- Linjära bivillkor $Ax \leq b$ och $x \geq 0$ (komponentvisa olikheter)

Tillåten lösning och optimalitet

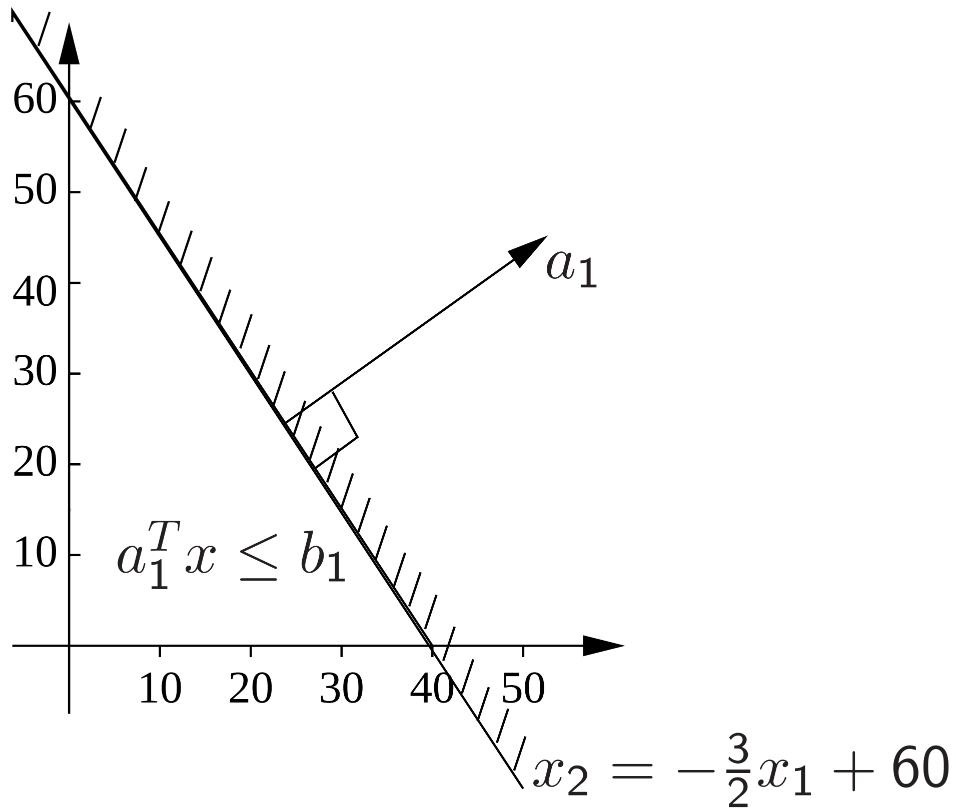
Det tillåtna området till (1) ges av

$$\mathcal{F} = \{x : Ax \leq b;\ x \geq 0\}$$

- Varje punkt $x \in \mathcal{F}$ kallas tillåten
- Punkten $\hat{x} \in \mathcal{F}$ kallas optimal om $c^T\hat{x} \geq c^T x$, för alla $x \in \mathcal{F}$.

Grafisk illustration av tillåtenhet och optimalitet

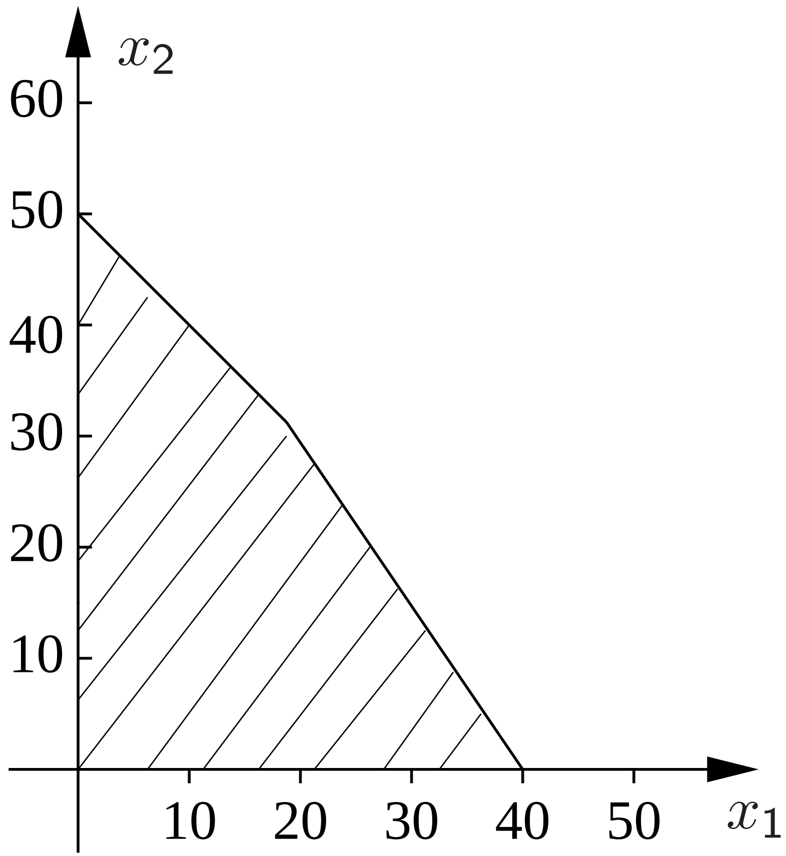
En olikhet av typen $a_k^T x \leq b_k$, $k = 1, 2$ svarar mot ett halvplan



Här är

$$a_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{60} \end{bmatrix}, \qquad b_1 = 1$$

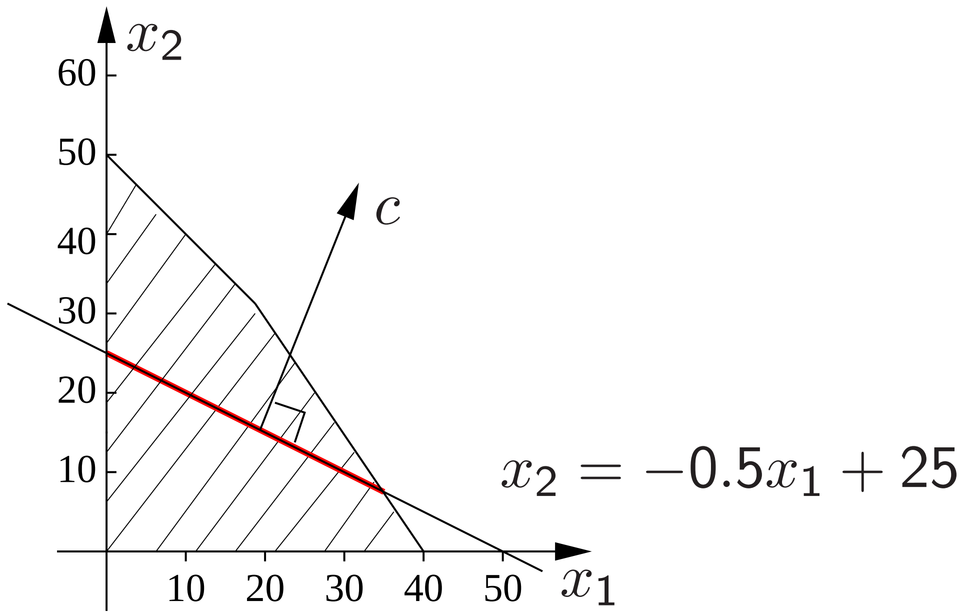
Tillåtna området till vårt exempelproblem blir en polyheder med fyra hörn

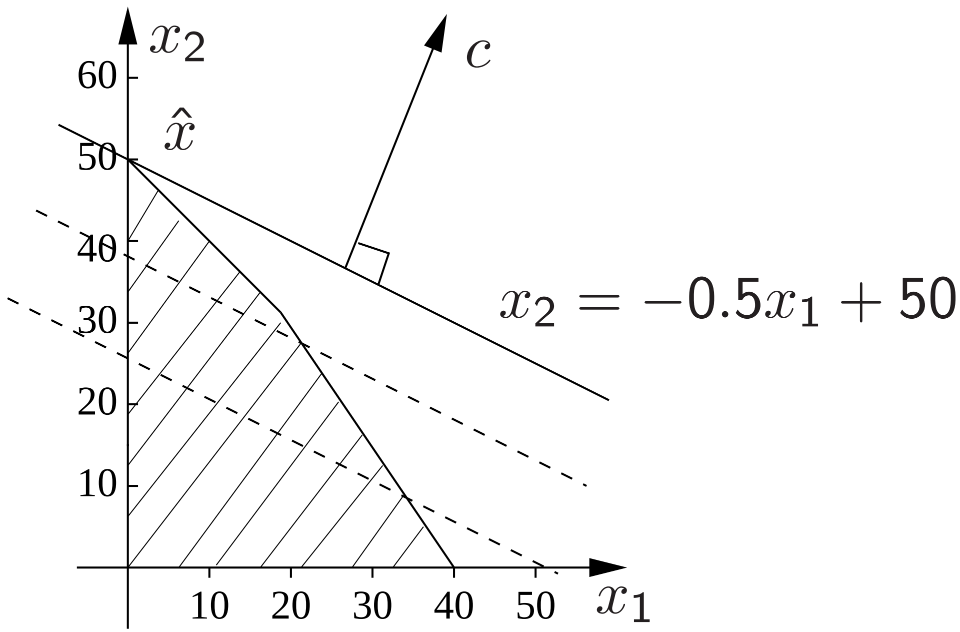


Målfunktionen illustreras bäst med isokostlinjer $c^T x = z$.

I vårt exempel svarar detta mot linjen

$$x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{z}{c_2} = -0.5x_1 + \frac{z}{400}$$





- Vi ser att optimum antages i hörnet $\hat{x} = (0, 50)$
- Optimalvärdet blir $\hat{z} = c^T\hat{x} = 20\,000$.

Man kan visa följande sats

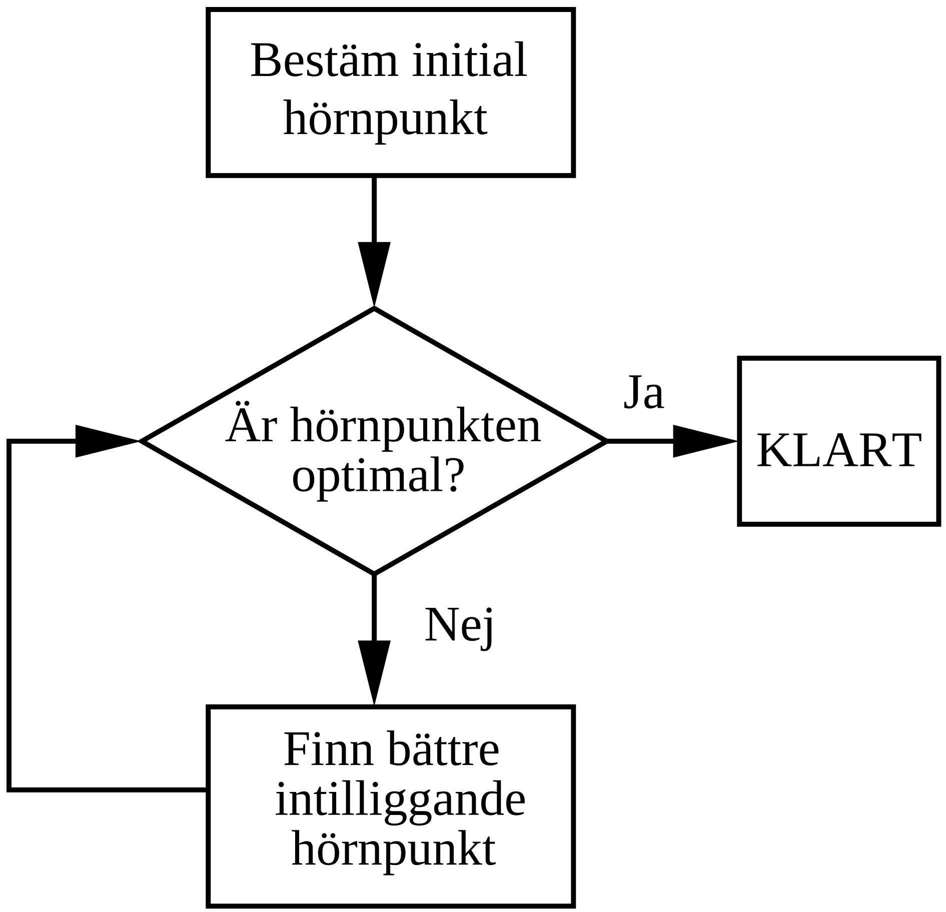
Sats 1. *Om det finns en optimal lösning till*

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & c^T x \\ \text{då} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

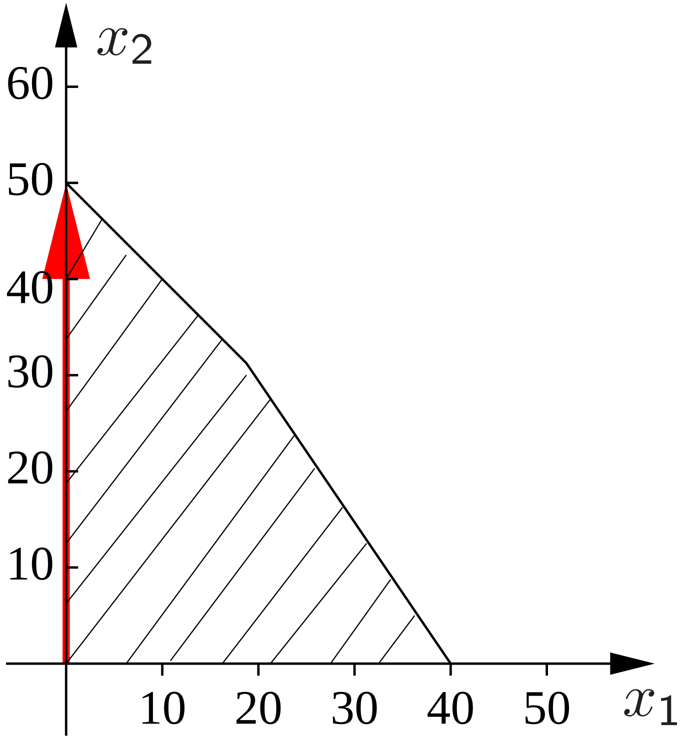
så finns det en optimal hörnlösning.

- Satsen visar att det räcker att leta bland hörnpunkterna när man löser optimeringsproblemet.
- Vi kommer senare att ge en precis algebraisk mening åt begreppet hörnpunkt.

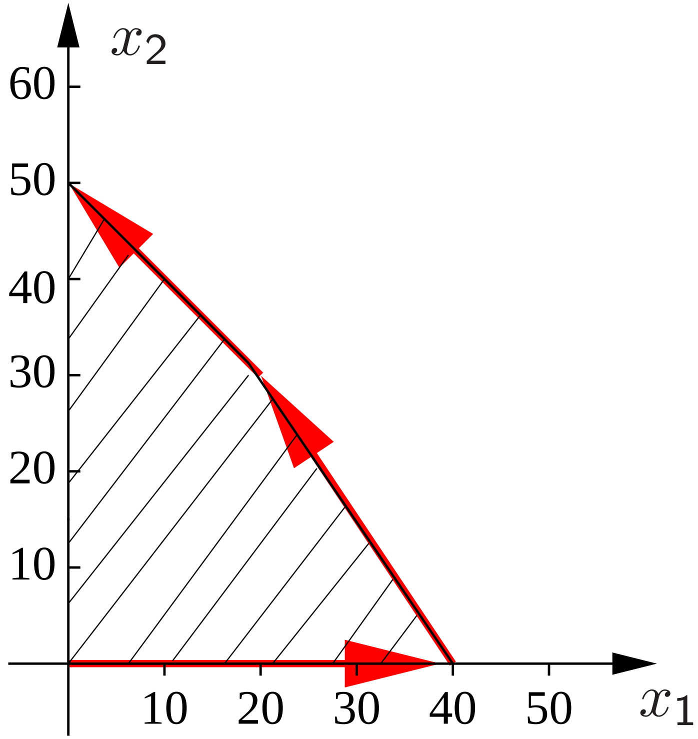
Introduktion till simplexmetoden



I algoritmen söker man alltid utefter en kant som utgår från det hörn som man befinner sig i.



Alternativ 1

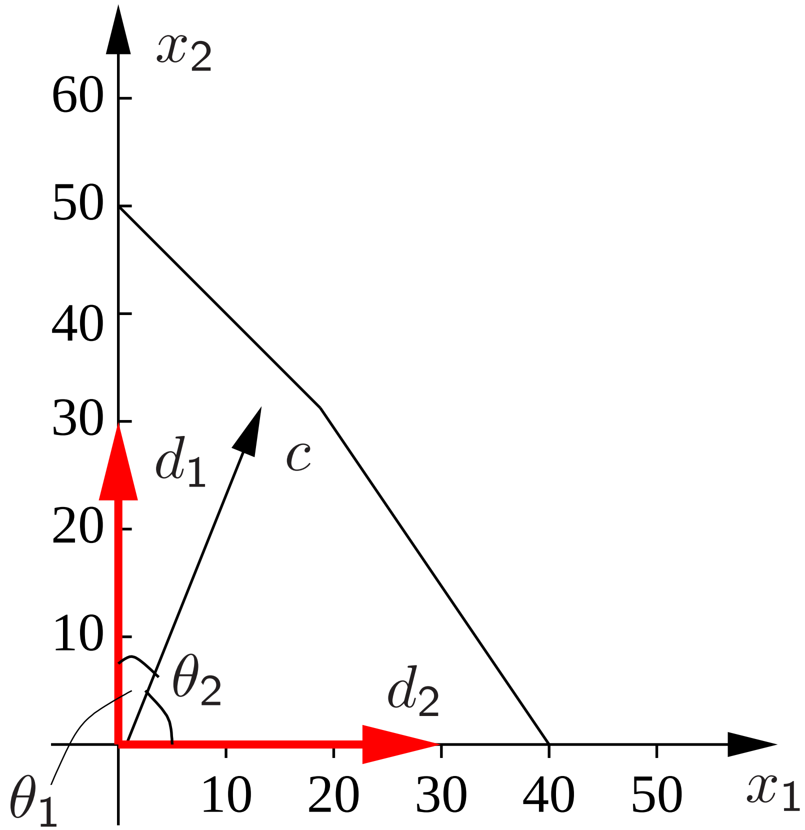


Alternativ 2

- Hur väljer man kortaste vägen?

- Det finns ingen effektiv algoritm som garanterat hittar kortaste vägen till optimum.
- Simplexalgoritmen finner i allmänhet en kort väg till optimum.
  - Väljer vad som (lokalt) verkar vara bästa vägen.
- Hur vet man att man hittat optimum?

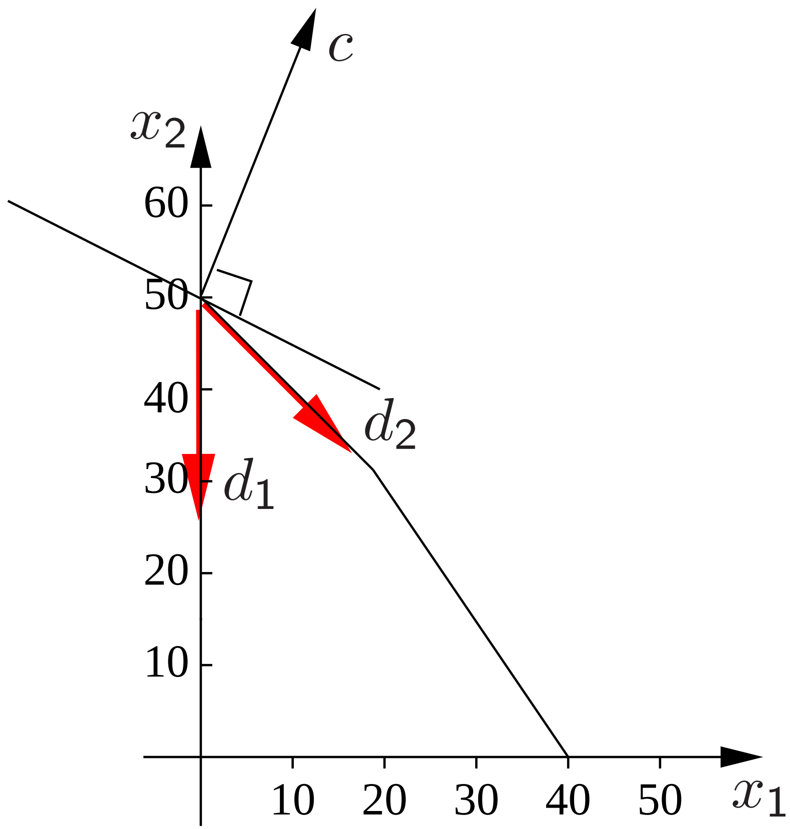
Simplexalgoritmens val av riktning



Det är lokalt bättre att gå längs kanten med "enhetsrikting" d_1 än att gå längs kanten med "enhetsrikting" d_2. Detta följer eftersom

$$c^T d_1 = \|c\| \cdot \underbrace{\|d_1\|}_{=1} \cos(\theta_1) > \|c\| \cdot \underbrace{\|d_2\|}_{=1} \cos(\theta_2) = c^T d_2$$

Stoppkriterium



Vi har nått optimala hörnpunkten då

$$c^T d_1 \leq 0$$

$$c^T d_2 \leq 0$$

Höjdpunkter de kommande veckorna

- Simplexalgoritmen:
  - Vårt geometriska resonemang ger intuition men måste ersättas med linjär algebra för numerisk implementation.
  - Hörnpunkter och kantriktingar erhålls som lösningar till linjära ekvationssystem.
- Dualitet:
  - Till varje linjärt optimeringsproblem finns ett dualt linjärt optimeringsproblem.
  - Dualen ger ny insikt och används för att härleda optimalitetsvillkor.
- Tillämpningar: Diet problem, transportproblem, lagerstyrning, nätverksoptimering.

Kommentar

Exemplet är taget från

"An Introduction to Linear Programming and the Simplex Algorithm"

En www kurs som finns på adressen

www.isye.gatech.edu/ spyros/LP/LP.html

LP-problem på standardform

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \qquad = \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1, \ldots, m & \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n & & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Det antages att $\mathbf{A}$ har linjärt oberoende rader.
  - Annars kan man reducera problemet genom att ta bort rader.
- Vi antar att $n > m$, vilket betyder att linjära bivillkoret är underbestämt. Om $n \leq m$ finns i allmänhet antingen
  - en unik lösning
  - ingen lösning varvid optimeringsproblemet är ointressant
- Alla linjära optimeringsproblem kan överföras till standardformen.
- Vi kommer härleda en simplexalgoritm för LP på standardform.

Knep för att transformera godtyckligt LP-problem till standardformen

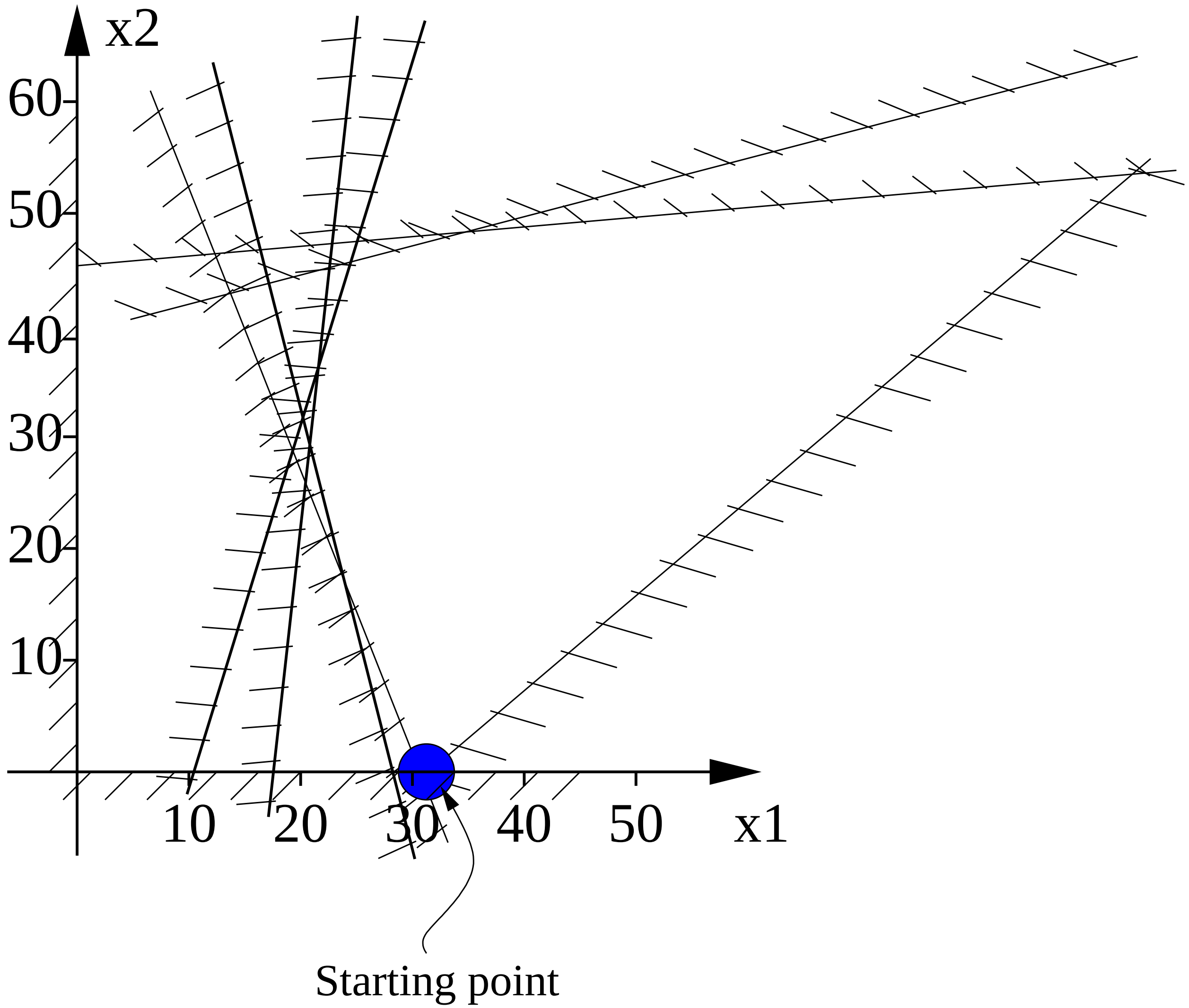
- $\max \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = -\min(-\mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{x}$
- Inför slack- respektive surplusvariabler vid olikhetsbivillkor
  - $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ ersätts av $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i$,
    där $x_{n+1} \geq 0$ är så kallade *slack-variabler*.
  - $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ ersätts av $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i$,
    där $x_{n+1} \geq 0$ är så kallade *surplus-variabler*.
- En variablel x_k som inte är teckenbegränsad kan ersättas med differensen $x_k = x_k' - x_k''$, där $x_k', x_k'' \geq 0$.

Några vanliga former på LP-problem

Form	Primal	Dual
Standardformen	minimera $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geq 0$	maximera $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$
Kanoniska formen	minimera $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geq 0$	maximera $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$ $\mathbf{y} \geq 0$
Pedagogiska formen	minimera $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$	maximera $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}$ $\mathbf{y} \geq 0$

Läsanvisningar

- Kapitel 1 (1.4 kursivt)
- Kapitel 2
- Kapitel 3



Givet startpunkten, om x_2 maximeras, var är då det globala optimat och vilken väg skulle Simplex Algoritmen välja ?

Standard form

Givet optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq x_2, \\ & x_2 + 3x_3 = 2, \\ & x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Skriv det på standardform, $\min c^T x$, sådant att $Ax = b$ och $x \geq 0$.