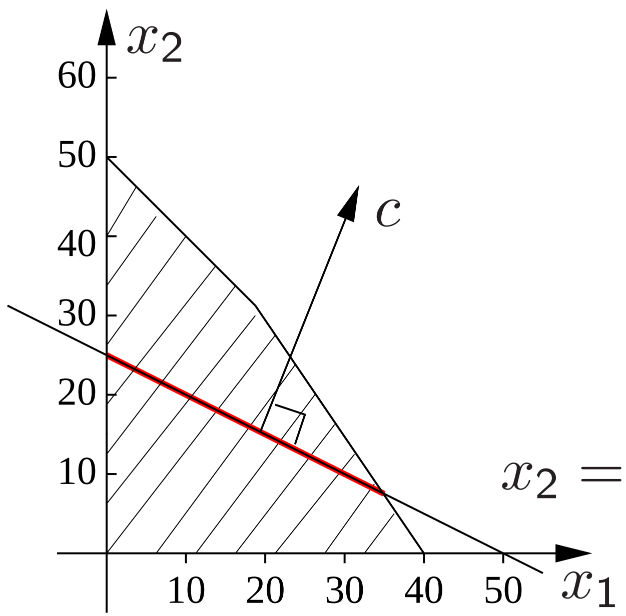
Föreläsning 2: Simplexmetoden

1. Repetition av geometriska simplexmetoden.
2. Linjärprogrammeringsproblem på standardform.
3. Simplexalgoritmen.
4. Hur bestämmer man tillåtna startbaslösningar ?

Repetition av den geometriska Simplexmetoden

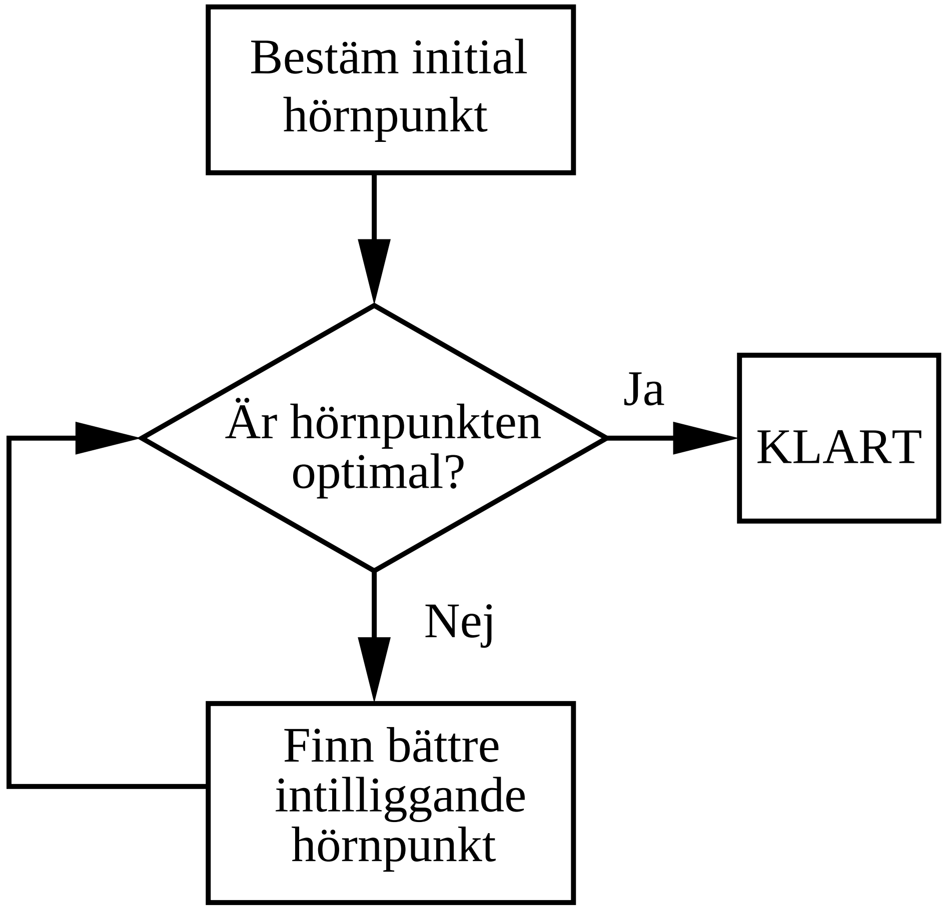
Produktplaneringsproblemet

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & 200x_1 + 400x_2 \\ \text{då} \quad & \tfrac{1}{40}x_1 + \tfrac{1}{60}x_2 \leq 1 \\ & \tfrac{1}{50}x_1 + \tfrac{1}{50}x_2 \leq 1 \\ & x_k \geq 0, \;\; k = 1, 2 \end{aligned}$$

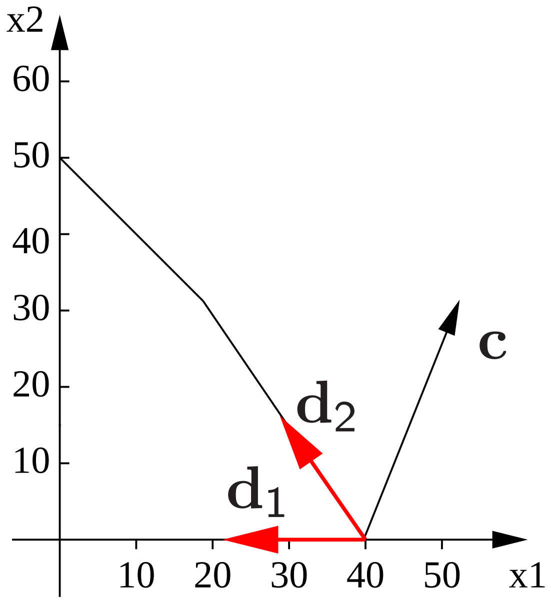


$x_2 = -0.5x_1 + 25$

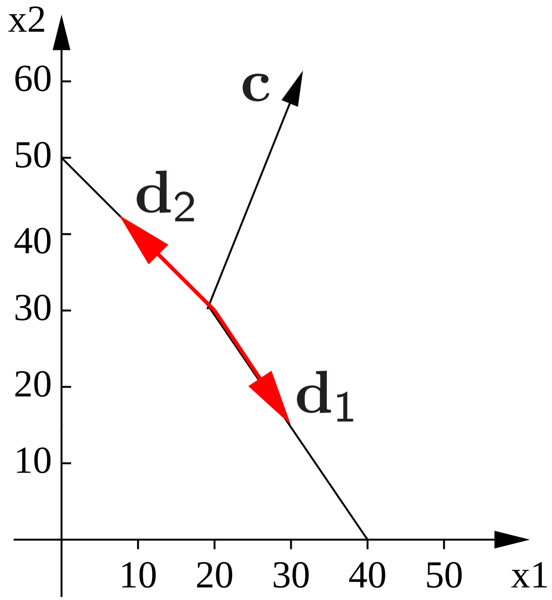
Idén bakom Simplexmetoden är att söka iterativt utefter kanter till hörn med allt bättre målfunktionsvärde.



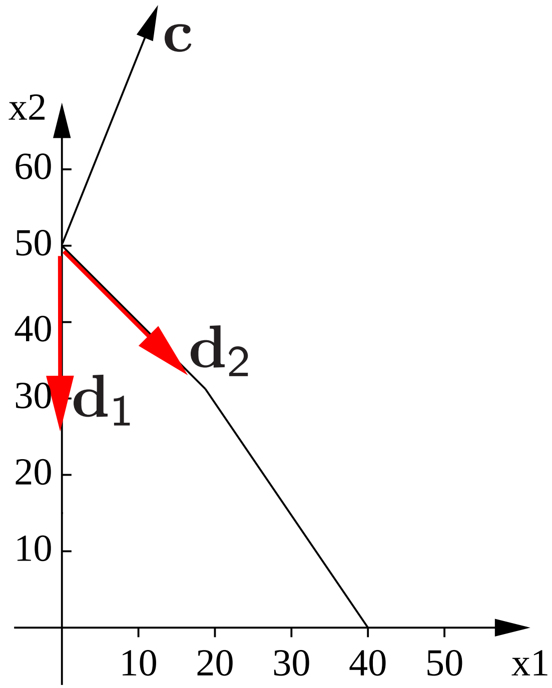
Sökning med den geometriska simplexmetoden



$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{d}_1 < 0$
$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{d}_2 > 0$
välj riktning d_2



$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{d}_1 < 0$
$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{d}_2 > 0$
välj riktning d_2



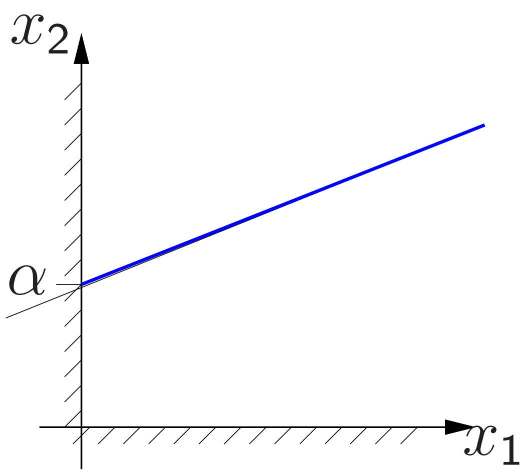
$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{d}_1 < 0$
$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{d}_2 < 0$
optimal HP

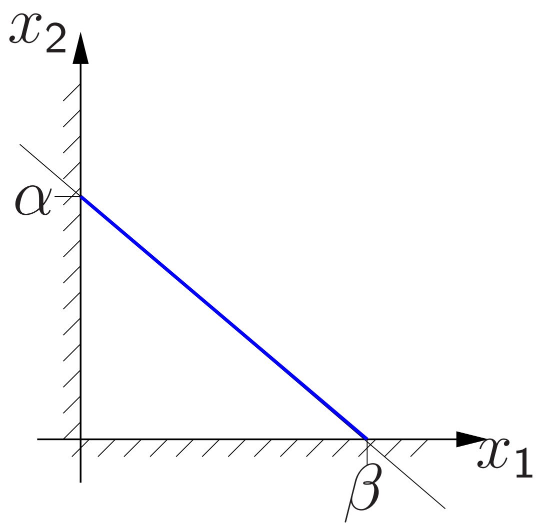
Standardformen för produktplaneringsexemplet.

$$
\begin{array}{rll}
\text{maximera} & 200x_1 + 400x_2 & = -\text{minimera} \quad -200x_1 - 400x_2 \\
\text{då} & \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1 & \text{då} \quad \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 + x_3 = 1 \\
& \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1 & \qquad \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 + x_4 = 1 \\
& x_k \geq 0,\ k = 1, 2 & \qquad x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4.
\end{array}
$$

Hur är hörnpunkter representerade i standardformen ?

Geometrisk tolkning för LP på standardform: 2D



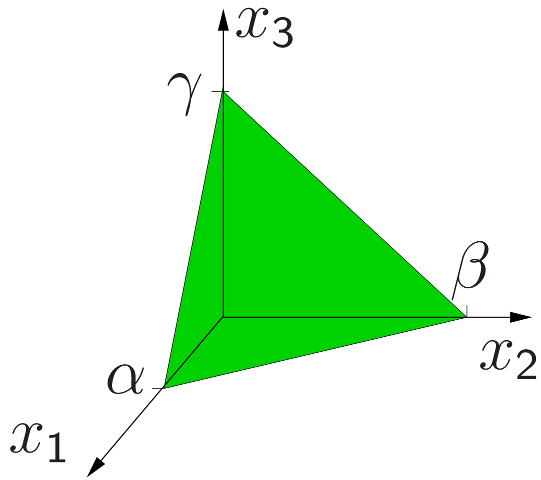


Bivillkor: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$.

$\mathcal{F}$ är ett halv-oändligt (blått) eller ändligt linjesegment (rött)

Det optimala $\hat{\mathbf{x}} = (0, \alpha)$, $(\beta, 0)$, eller så har problemet ingen ändlig lösning.

Geometrisk tolkning för LP på standardform: 3D



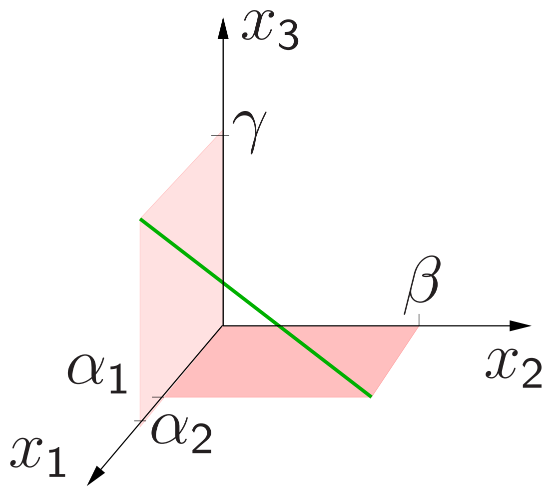
Bivillkor: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$.

$\mathcal{F}$ är skärningen av ett plan och den första kvadranten. (grönt)

Det finns tre hörnpunkter

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\alpha, 0, 0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (0, \beta, 0), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (0, 0, \gamma),$$

Geometrisk tolkning för LP på standardform: 3D



Bivillkor: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1.$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2.$$

$\mathcal{F}$ är skärningen av en linje och den första kvadranten (grön)

Det finns två hörnpunkter

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\alpha_1, \beta, 0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (\alpha_2, 0, \gamma),$$

Notera: $\#$ nollskilda element i $\mathbf{x}^{(k)} = \#$ bivillkor, i dessa exempel.

Produktionsplaneringsexemplet

Bivillkoret i standardform är $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{60} & 1 & 0 \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{50} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta kan skrivas som

$$\sum_{k=0}^{4} \mathbf{a}_k x_k = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 + \mathbf{a}_4 x_4 = b$$

Om vi sätter t.ex. $x_2 = x_3 = 0$ så har vi att $\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_4 x_4 = \mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta = \mathbf{b}$, där

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & 0 \\ \frac{1}{50} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Vi beräknar därefter

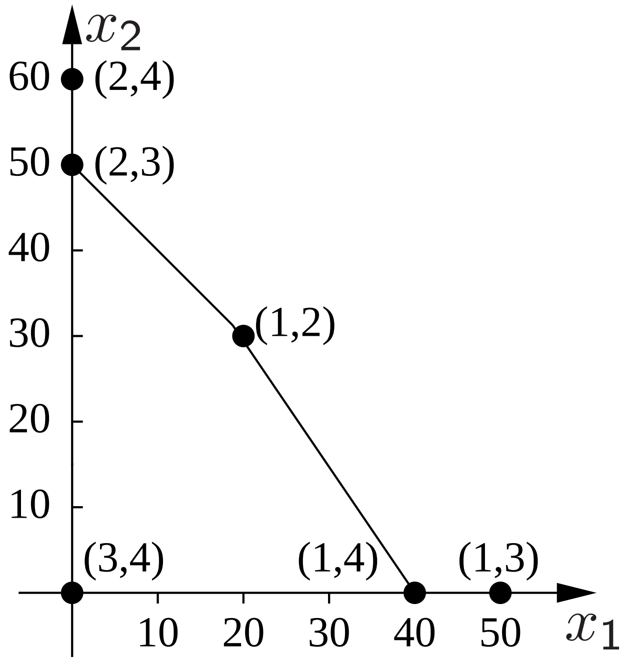
$$\mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 40 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Dessa värden på x_1 och x_4, tillsammans med $x_2 = x_3 = 0$, ger en tillåten lösning, *d.v.s.*, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $(x_1, x_2) = (40, 0)$.

Detta är en hörnpunkt.

Övriga lösningar motsvarande kombinationer av två kolumner i $\mathbf{A}$ finns representerade i tabellen på nästa sida.

Geometrisk illustration av baslösningarna



β	$\mathbf{A}_\beta$	$\mathbf{x}_\beta$	(x_1, x_2)
$(3,4)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$(2,4)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{60} & 0 \\ \frac{1}{50} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 60 \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 60 \end{bmatrix}$
$(1,4)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{40} & 0 \\ \frac{1}{50} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 40 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 40 \\ 0 \end{bmatrix}$
$(2,3)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{60} & 1 \\ \frac{1}{50} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix}$
$(1,3)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{40} & 1 \\ \frac{1}{50} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix}$
$(1,2)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{60} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$

Det gäller allmänt att hörnpunkter svarar mot så kallade baslösningar.

LP-problem på standardform

$$\begin{aligned} &\text{minimera} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{då} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, m \\ &\qquad x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n \end{aligned} \qquad = \qquad \begin{aligned} &\text{minimera} \quad \mathbf{c}^{\mathsf{T}} \mathbf{x} \\ &\text{då} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Simplexalgoritmen

För given basindexvektor och icke-basindexvektor

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$$
$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l), \quad l = n - m$$

definierar vi

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\beta_1} & \dots & \mathbf{a}_{\beta_m} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_\nu = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\nu_1} & \dots & \mathbf{a}_{\nu_l} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_\beta = \begin{bmatrix} c_{\beta_1} \\ \vdots \\ c_{\beta_m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} x_{\beta_1} \\ \vdots \\ x_{\beta_m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_\nu = \begin{bmatrix} c_{\nu_1} \\ \vdots \\ c_{\nu_l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_\beta = \begin{bmatrix} x_{\nu_1} \\ \vdots \\ x_{\nu_l} \end{bmatrix}$$

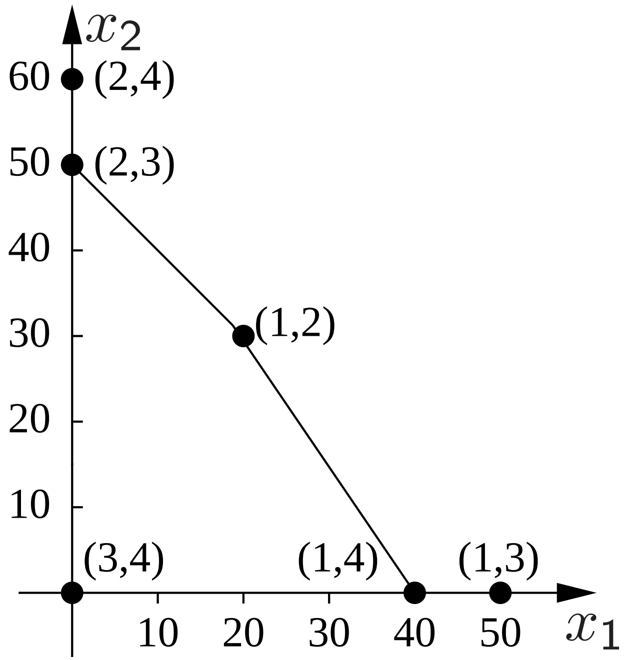
Definition 1. *Baslösningen svarande mot β ges av*

$$\mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta = \mathbf{b} \;\Rightarrow \mathbf{x}_\beta = \mathbf{A}_\beta^{-1} \mathbf{x}_\beta$$

baslösningen är tillåten (TBL) om $\mathbf{x}_\beta \geq 0$

- *En tillåten baslösning kallas icke-degenererad om* $\mathbf{x}_\beta > 0$
- *En tillåten baslösning kallas degenererad om* $\mathbf{x}_{\beta_k} = 0$ *för något index* β_k.

Produktplaneringsexemplet

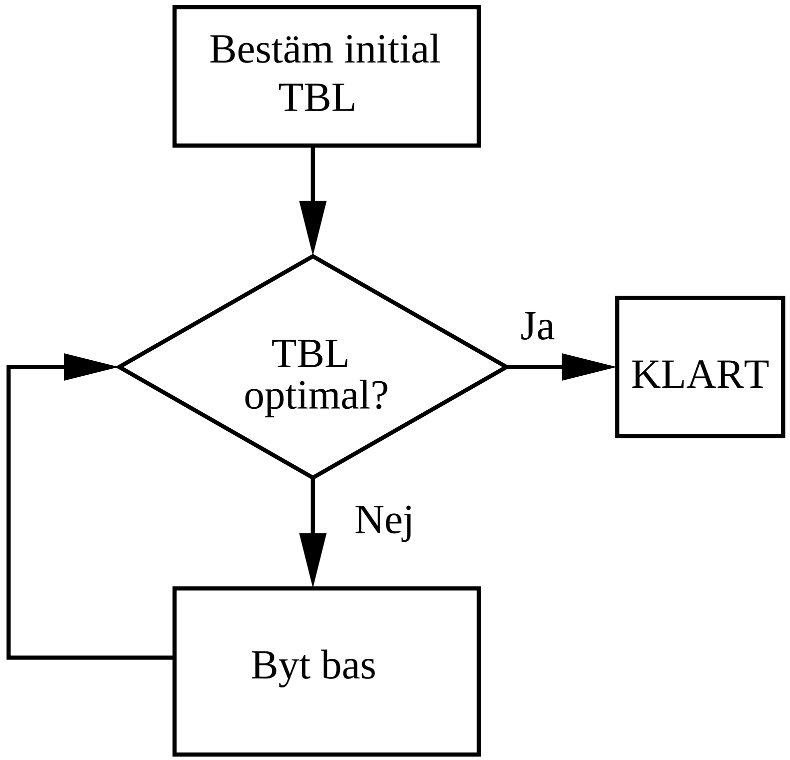


β	$\mathbf{A}_\beta$	$\mathbf{x}_\beta$	ν	$\mathbf{x}_\nu$
$(3,4)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$(1,2)$	$\mathbf{0}$
$(2,4)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{60} & 0 \\ \frac{1}{50} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 60 \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$	$(1,3)$	$\mathbf{0}$
$(1,4)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{40} & 0 \\ \frac{1}{50} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 40 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$	$(2,3)$	$\mathbf{0}$
$(2,3)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{60} & 1 \\ \frac{1}{50} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$(1,4)$	$\mathbf{0}$
$(1,3)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{40} & 1 \\ \frac{1}{50} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$(2,4)$	$\mathbf{0}$
$(1,2)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{60} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$	$(3,4)$	$\mathbf{0}$

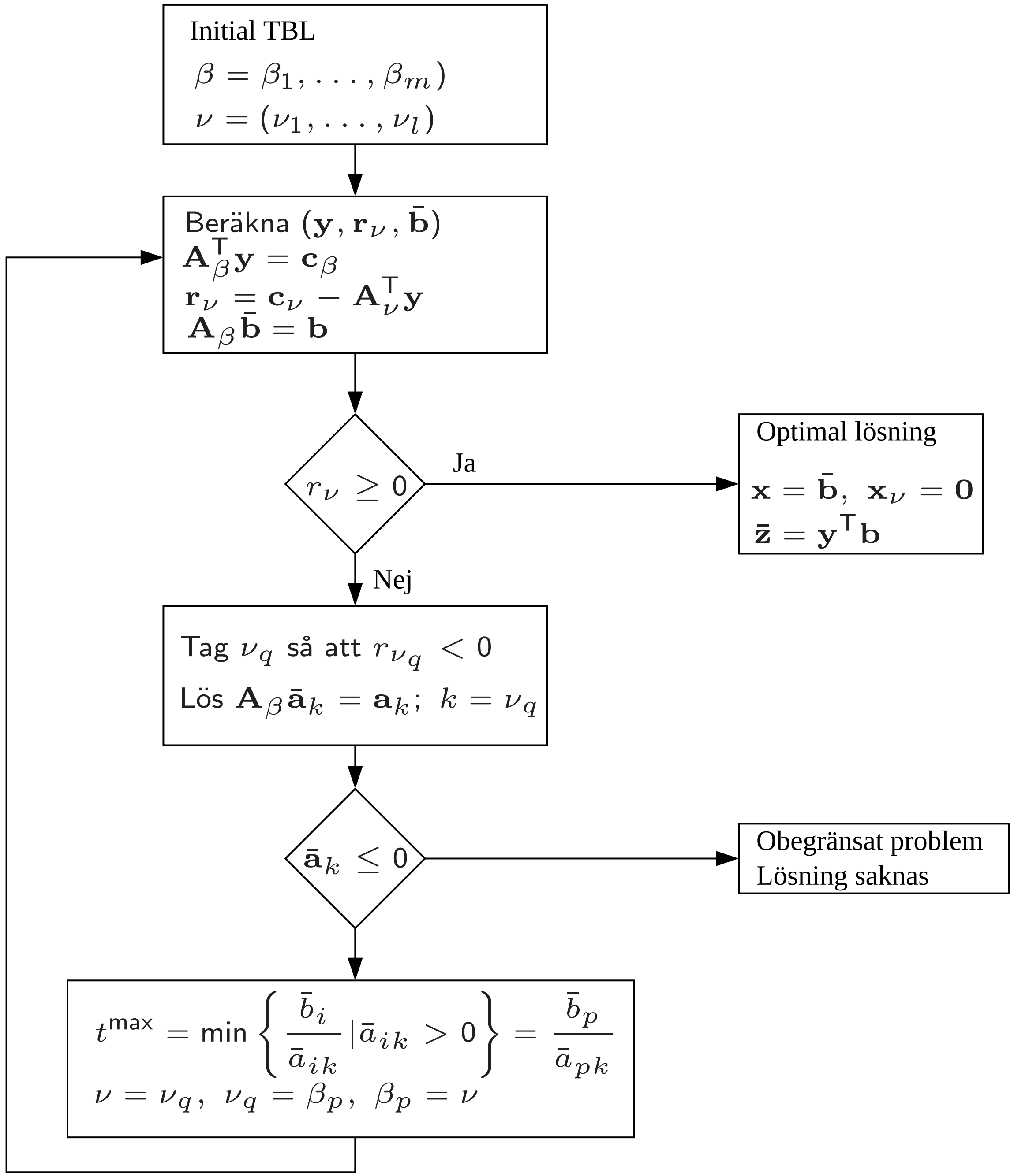
Villka baslösningar är tillåtna? Jämför med den geometriska tolkningen.

Sats 1. *Om det finns en optimal lösning så finns det en optimal tillåten baslösning.*

Satsen motiverar följande simplexalgoritm



De olika blocken kan implementeras med linjär algebraoperationer.


Initial TBL
$\beta = \beta_1, \ldots, \beta_m)$
$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_l)$
Beräkna $(\mathbf{y}, \mathbf{r}_\nu, \bar{\mathbf{b}})$
$\mathbf{A}_\beta^T \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$
$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{c}_\nu - \mathbf{A}_\nu^T \mathbf{y}$
$\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$
$r_\nu \geq 0$
Ja
Optimal lösning
$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{b}}, \; \mathbf{x}_\nu = \mathbf{0}$
$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{y}^T \mathbf{b}$
Nej
Tag ν_q så att $r_{\nu_q} < 0$
Lös $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_k = \mathbf{a}_k; \; k = \nu_q$
$\bar{\mathbf{a}}_k \leq 0$
Obegränsat problem
Lösning saknas
$t^{\max} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \,|\, \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pk}}$
$\nu = \nu_q, \; \nu_q = \beta_p, \; \beta_p = \nu$

Simplex för produktionsplaneringsexemplet

Standardformen för produktplaneringsexemplet.

$$\begin{bmatrix} \text{minimera} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \begin{array}{c} \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -200 & -400 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{60} & 1 & 0 \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{50} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vi vill lösa detta med simplex.

När man har infört slackvariabler kan man visa att om man väljer dessa som startbasvariabler så bildar det en TBL. (Givet att $\mathbf{b} \geq 0$)

Simplex

Låt $\beta = \{3, 4\}$ och $\nu = \{1, 2\}$,

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_\nu = \begin{bmatrix} 1/40 & 1/60 \\ 1/50 & 1/50 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_\beta^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_\nu^T = \begin{bmatrix} -200 & -400 \end{bmatrix}$$

Då blir baslösningen $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tillåten.

Simplexmultiplikatorerna ges av ekvationen $\mathbf{A}_\beta^T y = \mathbf{c}_\beta$ och reducerade kostnader ges av $\mathbf{r}_\nu^T = \mathbf{c}_\nu^T - y^T \mathbf{A}_\nu$, d.v.s.

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{och } \mathbf{r}_\nu^T = \begin{bmatrix} -200 & -400 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/40 & 1/60 \\ 1/50 & 1/50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 & -400 \end{bmatrix}.$$

Simplex

Eftersom de reducerade kostnaderna är negativa så är den aktuella TBL inte optimal. $\mathbf{r}_{\nu_2}$ är minst, så låt $\mathbf{x}_{\nu_2} = \mathbf{x}_2$ bli ny basvariabel.

Vilken variabel ska ut ur basen ?

$\bar{\mathbf{b}}$ bestäms från $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, d.v.s. $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\bar{\mathbf{a}}_2$ bestäms från $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2$, d.v.s. $\bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1/60 \\ 1/50 \end{bmatrix}$

Nu ska x_2 väljas så stor som möjligt då $\mathbf{x}_\beta$ är icke-negativ:

$$\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_2 x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/60 \\ 1/50 \end{bmatrix} x_2 \geq 0$$

Det största möjliga värdet på x_2 är 50, varvid $x_{\beta_2} = x_4 = 0$.
Alltså ska x_4 ersattas av x_2 i nästa baslösning.

Simplex: Iteration 2

Låt $\beta = \{3, 2\}$ och $\nu = \{1, 4\}$,

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1/60 \\ 0 & 1/50 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_\nu = \begin{bmatrix} 1/40 & 0 \\ 1/50 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_\beta^T = \begin{bmatrix} 0 & -400 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_\nu^T = \begin{bmatrix} -200 & 0 \end{bmatrix}$$

Då blir baslösningen $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -5/6 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 50 \end{bmatrix}$ tillåten.

Simplexmultiplikatorerna ges av ekvationen $\mathbf{A}_\beta^T y = \mathbf{c}_\beta$

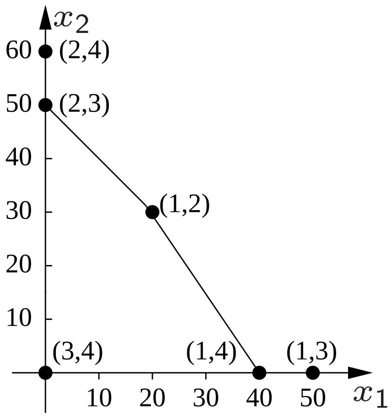
$$y = \mathbf{A}_\beta^{-T}\mathbf{c}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -5/6 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -20000 \end{bmatrix}.$$

Simplex: Iteration 2

Reducerade kostnader ges av $\mathbf{r}_\nu^T = \mathbf{c}_\nu^T - y^T \mathbf{A}_\nu$, d.v.s.

$$\mathbf{r}_\nu^T = \begin{bmatrix} -200 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -20000 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/40 & 0 \\ 1/50 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \; 20000 \end{bmatrix}.$$

Eftersom de reducerade kostnaderna är positiva så är den aktuella TBL optimal.



Vi startade i origo med basvariabler (3,4) och bytte sedan till basvariablerna (3,2), dvs punkten (0,50), vilken vi geometriskt motiverade är optimal.

Initial tillåten baslösning

Ibland kan det vara icke-trivialt att hitta en initial TBL. Då kan man lösa problemet i två faser. Här antar vi att $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Fas 1 Lös LP-problemet

$$
\begin{aligned}
\text{minimera} \quad & \mathbf{e}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} \\
\text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{v} \geq 0
\end{aligned}
$$

där $\mathbf{I}$ är enhetsmatrisen och $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$. Låt initial TBL svara mot variablerna i $\mathbf{v}$. Om optimallösningen är $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ så har man hittat en initial TBL till fas 2.

Fas 2 Lös ursprungliga problemet på standardform med basvariabler från Fas 1.

Läsanvisningar

I Optimeringskompendiet kap. 4 och 5.

Gamla Materialet:

- Linjär Optimering, Gröna häftet, sidan 13-22.
- Linjar Algebra för optimerare, Gula häfte, sidan 19-23.