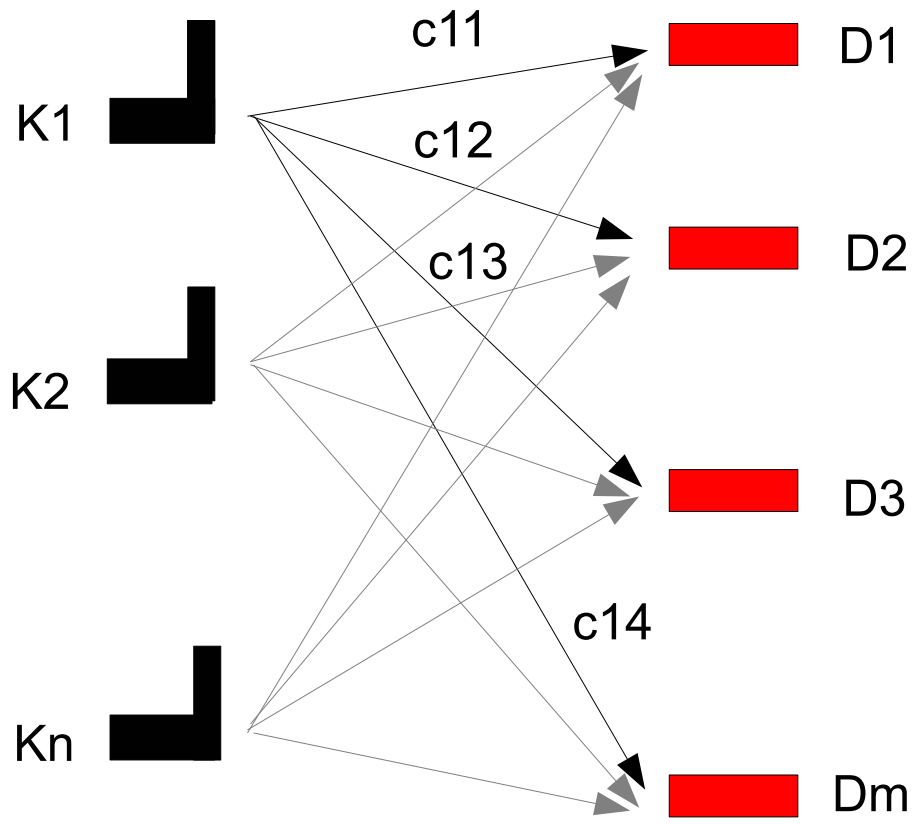
Föreläsning 6: Transportproblem (TP)

1. Transportproblem
2. Assignmentproblem

Transportproblem

Varor ska transporteras från fabriker till varuhus:



Mål: Minimera transportkostnaden under krav på att tillgång och efterfrågan möts vid fabrikerna och varuhusen.

Efterfrågesallokeringsmodell

Transportproblem

Varor transporteras från n st. fabriker till m st. varuhus.

Låt

- x_{ij}= Kvantitet av varorna som transporteras från fabrik i till varuhus j.
- c_{ij}= Transportkostnad per enhet från fabrik i till varuhus j.
- K_i= Kapacitet (tillgång) av varan i fabrik i.
- D_j= Efterfrågan av varan i fabrik j.

Problemet är "balancerat" om $\sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{j=1}^{m} D_j$.

Transportproblem

Matematisk Formulering:

$$
\begin{aligned}
\min_{x_{ij}} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\
\text{då} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = D_j, \; j = 1, \cdots, m \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq K_i, \; i = 1, \cdots, n \\
& x_{ij} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Tablårepresentation

Transportkostnaderna är

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	u_1
c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	u_2
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	u_3
v_1	v_2	v_3	v_4	

"Nodpotentialerna" ges av u och v

Variablerna är

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	K_1
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	K_2
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	K_3
D_1	D_2	D_3	D_4	

Efterfrågan och kapacitet är givna

North-West Corner Rule

Hur kan en initial TBL bestämmas för TP ?

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	K_1
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	K_2
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	K_3
D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	

Start i det "Nordvästra" hörnet, *d.v.s.* med x_{11}.

Låt x_{11} öka tills den är lika med antingen D_1 eller K_1.

Om $x_{11} = D_1$, låt x_{12} öka tills $x_{12} = D_2$ eller $x_{11} + x_{12} = K_1$.

Om $x_{11} = K_1$, låt x_{21} öka tills $x_{21} = K_2$ eller $x_{11} + x_{21} = D_1$.

North-West Corner Rule - Exempel

För efterfrågan och kapaciteterna givna nedan så ges en initial baslösning av

40	15	0	0	0	55
0	10	20	20	0	50
0	0	0	10	35	45
40	25	20	30	35	

Nodpotentialer och reducerade kostnader

Reducerade kostnader ges av $r_{ij} = c_{ij} + y_j - y_i$.

För basvariabler gäller $r_{ij} = 0$ så $y_i - y_j = c_{ij}$.

Här, låt

- u_i vara nodpotentialen (y_i) för källa i
- v_j vara nodpotentialen (y_j) för sänka j

Då gäller $u_i - v_j = c_{ij}$ för alla basvariabler.
(Detta används för att bestämma potentialerna, tillsammans med $v_m = 0$)

Och $r_{ij} = c_{ij} + v_j - u_i$ bestämmer reducerade kostnaderna för ickebas-variablerna

Nodpotentialer och reducerade kostnader - Exempel

Antag att vi har följande kostnader c_{ij} givna:

4	5	7	6	3
4	3	4	3	4
5	5	6	4	3

Då ges de reducerade kostnaderna och nodpotentialerna av

0	0	1	1	-1	$u_1 = 4$
2	0	0	0	2	$u_2 = 2$
2	1	1	0	0	$u_3 = 3$
$v_1 = 0$	$v_2 = -1$	$v_3 = -2$	$v_4 = -1$	$v_5 = 0$	

Den reducerade kostnaden $r_{15} = -1$ är negativ, så x_{15} ska gå in i basen.

Pivotsteget - Exempel

Öka x_{15} med δ och skapa en cykel för att balansera flödet.

40	$15-\delta$	0	0	$0+\delta$	55
0	$10+\delta$	20	$20-\delta$	0	50
0	0	0	$10+\delta$	$35-\delta$	45
40	25	20	30	35	

När $\delta = 15$, då blir $x_{15} = 0$ och går ur basen, och den nya baslösningen är

40	0	0	0	15	55
0	25	20	5	0	50
0	0	0	25	20	45
40	25	20	30	35	

Nodpotentialer och reducerade kostnader - Exempel

Antag att vi har följande givna kostnader c_{ij}:

4	5	7	6	3
4	3	4	3	4
5	5	6	4	3

Då ges de reducerade kostnaderna och nodpotentialerna av

0	1	2	2	0	$u_1 = 3$
1	0	0	0	2	$u_2 = 2$
1	1	1	0	0	$u_3 = 3$
$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -2$	$v_4 = -1$	$v_5 = 0$	

Alla reducerade kostnader är positiva, så den aktuella TBL är optimal.

Assignmentproblem

Assignmentproblemet är ett specialfall av Transportproblemet, där det finns lika många källor som sänkor, och alla tillgångar och kapaciteter är lika med ett.

Ett exempel är att tilldela n personer n olika jobb.
Låt c_{ij} vara kostnaden för att låta person i göra jobb j.
Variabeln x_{ij} får vara 1 om person i gör jobb j, och 0 annars.

I ett transportproblem där efterfrågan och kapacitet är heltal så kan man visa att det alltid finns en heltalig optimal lösning. Sålunda, kommer det alltid att finnas en binär lösning x_{ij} till assignmentproblemet, även om vi bara antar att variablerna är icke-negativa.

Assignmentproblem

Matematisk Formulering:

$$
\begin{aligned}
\min_{x_{ij}} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{då} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, \cdots, n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, \cdots, n \\
& x_{ij} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Läsanvisningar

I optimeringskompendiet kapitel 7.1

Gamla materialet: Linjär optimering, gröna häftet, sidan 29-35.