# Formelblad som delas ut på tentan i SF1861, 2010

**Observera att det ej är tillåtet att använda räknare på tentan!**

$\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

*Simplexmetoden för LP-problem på standardform:*
$\mathbf{A}_\beta = [\,\mathbf{a}_{\beta_1} \cdots \mathbf{a}_{\beta_m}]$, $\mathbf{A}_\nu = [\,\mathbf{a}_{\nu_1} \cdots \mathbf{a}_{\nu_\ell}]$, $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, $\bar{z} = \mathbf{c}_\beta^\mathsf{T} \bar{\mathbf{b}}$, $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$, $\mathbf{r}_\nu^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\nu^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\nu$.
Färdiga om $\mathbf{r}_\nu \geq \mathbf{0}$. Annars, välj ett $q$ med $r_{\nu_q} < 0$. $k = \nu_q$, $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_k = \mathbf{a}_k$, $x_k = t$,
$z = \bar{z} + r_k t$, $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_k t$, $t^{\max} = \min\limits_i \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \dfrac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pk}}$. Låt $\nu_q$ och $\beta_p$ byta plats.

*Duala problemet till allmänt LP-problem:*

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \mathbf{c}_1^\mathsf{T}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^\mathsf{T}\mathbf{x}_2 \\ \text{då} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_1, \\ & \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \\ & \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_2 \text{ fri.} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{maximera} & \mathbf{b}_1^\mathsf{T}\mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_2^\mathsf{T}\mathbf{y}_2 \\ \text{då} & \mathbf{A}_{11}^\mathsf{T}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{21}^\mathsf{T}\mathbf{y}_2 \leq \mathbf{c}_1, \\ & \mathbf{A}_{12}^\mathsf{T}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}^\mathsf{T}\mathbf{y}_2 = \mathbf{c}_2, \\ & \mathbf{y}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_2 \text{ fri.} \end{array}$$

*Kvadratiska funktioner:* $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + c_0$, med $\mathbf{H}$ symmetrisk.
$\nabla f(\mathbf{x}) = (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c})^\mathsf{T}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}$, $f(\mathbf{x} + t\,\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + t\,(\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} + \frac{1}{2}\,t^2\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{d}$.
$\hat{\mathbf{x}}$ är en minpunkt till $f$ om och endast om $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit och $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

*QP med likhetsbivillkor:* minimera $\frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + c_0$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{v}}$, $(\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{Z})\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{Z}^\mathsf{T}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$, $\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$.

*MN-lösning till MK-problem:* $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{u}}$.

*Newton:* $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^\mathsf{T}$ ger $\mathbf{d}^{(k)}$ om $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ är positivt definit.
$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_k\mathbf{d}^{(k)}$ där $t_k$ uppfyller $f(\mathbf{x}^{(k)} + t_k\mathbf{d}^{(k)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$.

*Ickelinjär MK:* minimera $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (h_i(\mathbf{x}))^2 = \frac{1}{2}|\mathbf{h}(\mathbf{x})|^2$, där $\mathbf{x} \in I\!R^n$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in I\!R^m$.
$\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x})$ en $m \times n$–matris med $\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ i rad nr $i$ och kolonn nr $j$.
$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})^\mathsf{T}\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x})$ (radvektor), $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x})^\mathsf{T}\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \sum_i h_i(\mathbf{x})\mathbf{H}_i(\mathbf{x})$.

*Gauss-Newton:* $\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})^\mathsf{T}\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d} = -\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})^\mathsf{T}\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})$ ger $\mathbf{d}^{(k)}$.
$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_k\mathbf{d}^{(k)}$ där $t_k$ uppfyller $f(\mathbf{x}^{(k)} + t_k\mathbf{d}^{(k)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$.

*NLP under likhetsbivillkor:* minimera $f(\mathbf{x})$ då $h_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$.
*Lagrange-villkoren:* $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_i \hat{u}_i \nabla h_i(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}^\mathsf{T}$ samt $h_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

*NLP under olikhetsbivillkor:* minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$.
*KKT-villkoren:* $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_i \hat{y}_i \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}^\mathsf{T}$, $g_i(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$, $\hat{y}_i \geq 0$, $\hat{y}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.