

## Lösningar till 5B1762 Optimeringslära för T, 28/8-07

### Uppgift 1.(a)

Först använder vi Gauss–Jordans metod på den givna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Addition av  $-1$  gånger första raden till andra raden och  $-1$  gånger första raden till tredje raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Addition av  $-1$  gånger andra raden till första raden och  $-2$  gånger andra raden till tredje raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nu är  $\mathbf{A}$  överförd till trappstegsform med *två trappstegsettor*,  $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

En bas till  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i  $\mathbf{A}$  som svarar mot trappstegsettor i  $\mathbf{U}$ , dvs kolonnerna 1 och 2 i  $\mathbf{A}$ .

De två vektorerna  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  utgör alltså en bas till  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$

En bas till  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$  kan bestämmas enligt följande:

Sätt först  $x_3 = 1$  och  $x_4 = 0$  och bestäm  $x_1$  och  $x_2$  så att  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Sätt sedan  $x_3 = 0$  och  $x_4 = 1$  och bestäm  $x_1$  och  $x_2$  så att  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Det ger de bägge basvektorerna  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  till  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ .

Nu använder vi Gauss–Jordans metod på matrisen

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Addition av  $-1$  gånger första raden till andra raden,  $-2$  gånger första raden till tredje raden och  $-3$  gånger första raden till fjärde raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Addition av  $-1$  gånger andra raden till första raden,  $-1$  gånger andra raden till tredje raden och  $-2$  gånger andra raden till fjärde raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nu är  $\mathbf{A}^T$  överförd till trappstegsform med *två trappstegssettor*,  $\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

En bas till  $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$  erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i  $\mathbf{A}^T$  som svarar mot trappstegssettor i  $\tilde{\mathbf{U}}$ , dvs kolonnerna 1 och 2 i  $\mathbf{A}^T$ .

De två vektorerna  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  utgör alltså en bas till  $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$

En bas till  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$  kan bestämmas enligt följande:

Sätt  $y_3 = 1$  (den enda variabel som inte svarar mot en trappstegssetta) och bestäm sedan  $y_1$  och  $y_2$  (variablerna svarande mot trappstegssettor)

så att  $\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . Det ger den första och enda basvektorn  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  till  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ .

### Uppgift 1.(b)

Låt:

$X_A$  = antal hektoliter Äppelmust som produceras per vecka.

$X_P$  = antal hektoliter Päronmust som produceras per vecka.

$X_B$  = antal hektoliter Blandmust som produceras per vecka.

$X_C$  = antal hektoliter Cidermust som produceras per vecka.

Vi får då problemformuleringen

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & 196X_A + 210X_P + 280X_B + 442X_C \\ \text{då} \quad & 1.6X_A + 1.8X_P + 3.2X_B + 5.4X_C \leq 80 \\ & 1.2X_A + 1.2X_P + 1.2X_B + 1.8X_C \leq 40 \\ & -0.8X_A + 0.2X_P + 0.2X_B + 0.2X_C \leq 0 \\ & -0.3X_A + 0.7X_P - 0.3X_B - 0.3X_C \leq 0 \\ & X_A \geq 0, X_P \geq 0, X_B \geq 0, X_C \geq 0. \end{aligned}$$

### Uppgift 2.(a)

Vi har ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} & \text{minimera } \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{då } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

där  $\mathbf{A} = [6 \ 3 \ 9 \ 7]$ ,  $\mathbf{b} = (18)$  och  $\mathbf{c}^\top = (3, 2, 4, 6)$ .

Eftersom  $\mathbf{A}$  bara har en rad, så innehåller varje baslösning enbart en basvariabel. Enligt uppgiftslydelsen ska vi starta med  $x_1 = 3 > 0$ , vilket betyder att det är  $x_1$  som är basvariabeln i startlösningen. Vi har alltså att  $\beta = (1)$  och  $\delta = (2, 3, 4)$ .

Motsvarande "basmatris" ges av  $\mathbf{A}_\beta = [6]$ , medan  $\mathbf{A}_\delta = [3 \ 9 \ 7]$ .

Basvariabelns värde i baslösningen ges av  $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$ , där "vektorn"  $\bar{\mathbf{b}}$  beräknas ur systemet  $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ , dvs  $[6] (\bar{b}_1) = (18)$ , med lösningen  $\bar{\mathbf{b}} = (\bar{b}_1) = (3)$ .

Simplexmultiplikatorns värde erhålls ur systemet  $\mathbf{A}_\beta^\top \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$ ,  
dvs  $[6] (y_1) = (3)$ , med lösningen  $\mathbf{y} = (y_1) = (0.5)$ .

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av  
 $\mathbf{r}_\delta^\top = \mathbf{c}_\delta^\top - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_\delta = (2, 4, 6) - (0.5) [3 \ 9 \ 7] = (0.5, -0.5, 2.5)$ .

Eftersom  $r_{\delta_2} = r_3 = -0.5$  är minst, och  $< 0$ , ska vi låta  $x_3$  bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna "vektorn"  $\bar{\mathbf{a}}_3$  ur systemet  $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_3$ ,  
dvs  $[6] (\bar{a}_{13}) = (9)$ , med lösningen  $\bar{\mathbf{a}}_3 = (\bar{a}_{13}) = (1.5)$ .

Det största värde som den nya basvariabeln  $x_3$  kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} \mid \bar{a}_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1.5} \right\} = \frac{3}{1.5} = \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{13}}.$$

Minimerande index är  $i = 1$  (förstås), varför  $x_{\beta_1} = x_1$  inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av  $x_3$ . Nu är alltså  $\beta = (3)$  och  $\delta = (2, 1, 4)$ .

Motsvarande "basmatris" ges av  $\mathbf{A}_\beta = [9]$ , medan  $\mathbf{A}_\delta = [3 \ 6 \ 7]$ .

Basvariabelns värde i baslösningen ges av  $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$ , där "vektorn"  $\bar{\mathbf{b}}$  beräknas ur systemet  $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ , dvs  $[9] (\bar{b}_1) = (18)$ , med lösningen  $\bar{\mathbf{b}} = (\bar{b}_1) = (2)$ .

Simplexmultiplikatorns värde erhålls ur systemet  $\mathbf{A}_\beta^\top \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$ ,  
dvs  $[9] (y_1) = (4)$ , med lösningen  $\mathbf{y} = (y_1) = (4/9)$ .

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av  
 $\mathbf{r}_\delta^\top = \mathbf{c}_\delta^\top - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_\delta = (2, 3, 6) - (4/9) [3 \ 6 \ 7] = (2/3, 1/3, 26/9)$ .

Eftersom  $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$  så är den aktuella baslösningen optimal.

Därmed är punkten  $\mathbf{x} = (0, 0, 2, 0)^\top$  optimal, med optimalvärdet 8.

### Uppgift 2.(b)

Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{aligned} &\text{minimera } \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ &\text{då } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

så är det duala problemet på formen: maximera  $\mathbf{b}^\top \mathbf{y}$  då  $\mathbf{A}^\top \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$ , som här blir:

$$\begin{aligned} &\text{maximera } 18y_1 \\ &\text{då } 6y_1 \leq 3 \\ &\quad 3y_1 \leq 2 \\ &\quad 9y_1 \leq 4 \\ &\quad 7y_1 \leq 6 \end{aligned}$$

Optimal lösning är  $y_1 = 4/9$ , med optimalvärdet  $18y_1 = 8$ .

### Uppgift 2.(c)

Enligt uppgiftslydelsen har vi följande primala respektive duala problem:

$$\begin{aligned} &\text{minimera } x_3 \\ &\text{då } -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0 \\ &\quad 3x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 0 \\ &\quad x_1 + x_2 = 1 \\ &\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ ej teckenbegränsad.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{maximera } y_3 \\ &\text{då } -y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 0 \\ &\quad 2y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 0 \\ &\quad y_1 + y_2 = 1 \\ &\quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ ej teckenbegränsad.} \end{aligned}$$

Vi vet att  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^\top = (0.6, 0.4, -0.2)^\top$  är en optimal lösning till det primala problemet.

Antag att  $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)^\top$  är en optimal lösning till det duala problemet.

Från dualitetssatsen följer då att  $\hat{y}_3 = \hat{x}_3 = -0.2$ .

Vidare följer från komplementaritetsatsen att eftersom  $\hat{x}_1 > 0$  så måste  $-\hat{y}_1 + 3\hat{y}_2 + \hat{y}_3 = 0$  och eftersom  $\hat{x}_2 > 0$  så måste  $2\hat{y}_1 - 4\hat{y}_2 + \hat{y}_3 = 0$ .

Tillsammans ger detta att  $\hat{y}_1 = 0.7$  och  $\hat{y}_2 = 0.3$ , som också mycket riktigt uppfyller de övriga bivillkoren i det duala problemet.

Alltså:  $\hat{y}_1 = 0.7$ ,  $\hat{y}_2 = 0.3$  och  $\hat{y}_3 = -0.2$  är en optimal lösning till det duala problemet (i själva verket den unika optimallösningen).

### Uppgift 3.(a)

Gradienten  $\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$ , där  $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 4x_j^3 - 3x_j^2 + 2x_j - 1$ .

Hessianen  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  är i detta exempel en  $3 \times 3$  diagonalmatris med diagonalelementen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \text{ och } \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}, \text{ där } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 12x_j^2 - 6x_j + 2.$$

$f$  är konvex på  $\mathbb{R}^3$  om och endast om  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  är positivt semidefinit för alla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .

En diagonalmatris är positivt semidefinit om och endast om alla diagonalelement är  $\geq 0$ .

Men  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 12(x_j^2 - \frac{1}{2}x_j + \frac{1}{6}) = 12((x_j - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{6}) > 0$  för alla värden på  $x_j$ .

Alltså är  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  positivt definit för alla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , och därmed är  $f$  (strikt) konvex på  $\mathbb{R}^n$ .

### Uppgift 3.(b)

Newtonriktningen  $\mathbf{d}^{(1)}$  bestäms ur ekvationssystemet  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) \mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(1)})^\top$ , förutsatt att  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$  är positivt definit, vilket vi redan konstaterat att den är.

I vårt fall är  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$  en diagonalmatris, varför lösningen till ekvationssystemet blir

$$d_j^{(1)} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{(1)})}{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x^{(1)})} = -\frac{4(x_j^{(1)})^3 - 3(x_j^{(1)})^2 + 2x_j^{(1)} - 1}{12(x_j^{(1)})^2 - 6x_j^{(1)} + 2}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Eftersom  $x_j^{(1)} = 1$  för alla  $j$  så blir  $d_j^{(1)} = -0.25$  för alla  $j$ .

Vi provar med steget  $t_1 = 1$ , så att  $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + t_1 \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}^{(1)} = (0.75, 0.75, 0.75)^\top$ .

Då blir  $f(\mathbf{x}^{(2)}) = -\frac{225}{256} < 0 = f(\mathbf{x}^{(1)})$ , så steget  $t_1 = 1$  gick bra.

Därmed har vi utfört en fullständig iteration med Newtons metod.

### Uppgift 3.(c)

Vi har att  $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$ , där  $f_j(x_j) = x_j^4 - x_j^3 + x_j^2 - x_j$ , som är en konvex envariabelfunktion med derivatan  $f'_j(x_j) = 4x_j^3 - 3x_j^2 + 2x_j - 1$ .

För deriverbara konvexa envariabelfunktioner gäller olikheten

$$f_j(x_j) \geq f_j(a) + f'_j(a)(x_j - a), \text{ för varje } x_j \in \mathbb{R} \text{ och varje } a \in \mathbb{R}.$$

Speciellt är  $f'_j(0) = -1 < 0$  och  $f'_j(1) = 2 > 0$ , vilket ger olikheterna:

$$f_j(x_j) \geq f_j(0) + f'_j(0)(x_j - 0) = -x_j \text{ för alla } x_j \text{ och}$$

$$f_j(x_j) \geq f_j(1) + f'_j(1)(x_j - 1) = 2(x_j - 1) = 2x_j - 2 \text{ för alla } x_j.$$

Om  $x_j \geq 2/3$  så är  $f_j(x_j) \geq 2x_j - 2 \geq 4/3 - 2 = -2/3$ .

Om  $x_j \leq 2/3$  så är  $f_j(x_j) \geq -x_j \geq -2/3$ .

Därmed är  $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq -2$  för alla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,

dvs  $f(\mathbf{x}) > C$  för alla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  om konstanten  $C$  är  $< -2$ , t ex  $C = -3$ .

#### Uppgift 4.(a)

Här vill vi lösa problemet att minimera  $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{x}$  då  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b$ .

Detta är ett konvext QP-problem med ett likhetsbivillkor, så optimalitetsvillkoren blir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ b \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \hat{u} = \frac{b}{|\mathbf{a}|^2} \text{ och } \hat{\mathbf{x}} = \hat{u} \cdot \mathbf{a} = \frac{b}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a}.$$

$$\text{Därmed är } |\hat{\mathbf{x}}|^2 = \frac{b^2}{|\mathbf{a}|^2}.$$

#### Uppgift 4.(b)

Här vill vi lösa problemet att minimera  $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{x}$  då  $\mathbf{x} = \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{d}$ , vilket är ekvivalent med envariabelproblemet att minimera  $\frac{1}{2} (\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{d})^\top (\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{d})$  då  $t \in \mathbb{R}$ .

Minimering med avseende på  $t$  ger att  $\bar{t} = -\frac{\mathbf{c}^\top \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}$ , varvid  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c} - \frac{\mathbf{c}^\top \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2} \cdot \mathbf{d}$ .

$$\text{Därmed är } |\bar{\mathbf{x}}|^2 = |\mathbf{c}|^2 - \frac{(\mathbf{c}^\top \mathbf{d})^2}{|\mathbf{d}|^2}.$$

#### Uppgift 4.(c)

Nu är  $\mathbf{d} = \mathbf{a}$ . Om man sätter in  $\mathbf{x} = \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{a}$  i ekvationen  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b$  så erhålls att

$$t = \frac{b - \mathbf{c}^\top \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}, \text{ varvid skärningspunkten blir } \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{c} + \frac{b - \mathbf{c}^\top \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a}.$$

#### Uppgift 4.(d)

$$\text{Från (c)-uppgiften får vi att } |\tilde{\mathbf{x}}|^2 = |\mathbf{c}|^2 + \frac{b^2}{|\mathbf{a}|^2} - \frac{(\mathbf{c}^\top \mathbf{a})^2}{|\mathbf{a}|^2}.$$

Om man jämför med svaren i (a)- och (b)-uppgifterna, och sätter  $\mathbf{d} = \mathbf{a}$ , så erhålls att  $|\tilde{\mathbf{x}}|^2 = |\hat{\mathbf{x}}|^2 + |\bar{\mathbf{x}}|^2$ .

Den geometriska tolkningen bygger på att när  $\mathbf{d} = \mathbf{a}$  så är  $\hat{\mathbf{x}}$  och  $\bar{\mathbf{x}}$  ortogonala och  $\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}$ . (Detta följer av enkla kalkyler.) Därmed utgör  $\tilde{\mathbf{x}}$  diagonalen i en rätvinklig rektangel vars sidor utgörs av  $\hat{\mathbf{x}}$  och  $\bar{\mathbf{x}}$ . Sambandet  $|\tilde{\mathbf{x}}|^2 = |\hat{\mathbf{x}}|^2 + |\bar{\mathbf{x}}|^2$  är då Pythagoras sats.

### Uppgift 5.(a)

Problemet kan skrivas på formen: minimera  $f(\mathbf{x})$  då  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ ,  $i = 1, 2$ , där

$$f(\mathbf{x}) = 8x_1 - 6x_2, \quad g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4, \quad g_2(\mathbf{x}) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4.$$

Målfunktionen är linjär, och därmed även konvex.

Båda bivillkorsfunktionerna har andraderivatsmatrisen  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  som är positivt definit.

Därmed är även bivillkorsfunktionerna konvexa, varför det betraktade problemet är ett konvext optimeringsproblem. Vidare uppfyller exempelvis  $\mathbf{x} = (0, 0)^T$  samtliga bivillkor med strikt olikhet, så det betraktade problemet är ett *regulärt* konvext problem. Det betyder att en punkt  $\hat{\mathbf{x}}$  är en globalt optimal lösning till problemet om och endast om  $\hat{\mathbf{x}}$  är en KKT-punkt.

### Uppgift 5.(b)

$$\begin{aligned} \text{Lagrangefunktionen kan skrivas } L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}) + y_1 g_1(\mathbf{x}) + y_2 g_2(\mathbf{x}) = \\ &= 8x_1 - 6x_2 + y_1((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4) + y_2((x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4). \end{aligned}$$

KKT-villkoren kan delas upp i fyra grupper enligt följande.

(KKT-1)  $\partial L / \partial x_j = 0$  för  $j = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} 8 + 2y_1(x_1 - 1) + 2y_2(x_1 + 1) &= 0, \\ -6 + 2y_1(x_2 - 1) + 2y_2(x_2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

(KKT-2) Tillåten punkt, dvs  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  för  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4 &\leq 0, \\ (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4 &\leq 0. \end{aligned}$$

(KKT-3) Lagrangemultiplikatorerna icke-negativa:

$$\begin{aligned} y_1 &\geq 0, \\ y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

(KKT-4) Komplementaritetsvillkor, dvs  $y_i g_i(\mathbf{x}) = 0$  för  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} y_1((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4) &= 0, \\ y_2((x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4) &= 0. \end{aligned}$$

### Uppgift 5.(c)

Antag först att  $\mathbf{x}$  uppfyller  $g_1(\mathbf{x}) = 0$  och  $g_2(\mathbf{x}) < 0$ . Enligt KKT-4 är då  $y_2 = 0$ , varefter KKT-1 ger att  $x_1 = 1 - 4/y_1$  och  $x_2 = 1 + 3/y_1$ .

Insättning av detta i  $g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4 = 0$  ger att  $y_1^2 = 25/4$ .

Pga KKT-3 är då  $y_1 = 5/2$ , vilket svarar mot punkten  $x_1 = -3/5$ ,  $x_2 = 11/5$ .

Denna punkt uppfyller  $g_1(\mathbf{x}) = 0$ , men tyvärr blir  $g_2(\mathbf{x}) > 0$  så det är ingen KKT-punkt.

Antag nu att  $\mathbf{x}$  uppfyller  $g_2(\mathbf{x}) = 0$  och  $g_1(\mathbf{x}) < 0$ . Enligt KKT-4 är då  $y_1 = 0$ , varefter KKT-1 ger att  $x_1 = -1 - 4/y_2$  och  $x_2 = -1 + 3/y_2$ .

Insättning av detta i  $g_2(\mathbf{x}) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4 = 0$  ger att  $y_2^2 = 25/4$ .

Pga KKT-3 är då  $y_2 = 5/2$ , vilket svarar mot punkten  $x_1 = -13/5$ ,  $x_2 = 1/5$ .

Denna punkt uppfyller  $g_2(\mathbf{x}) = 0$ , men tyvärr blir  $g_1(\mathbf{x}) > 0$  så det är ingen KKT-punkt.

**Uppgift 5.(d)**

Antag att  $\mathbf{x}$  uppfyller  $g_1(\mathbf{x}) = 0$  och  $g_2(\mathbf{x}) = 0$ , dvs

$$\begin{aligned}x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 &= 2, \\x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 &= 2.\end{aligned}$$

Om man addera dessa ekvationer så erhålls  $x_1^2 + x_2^2 = 2$ .

Om man subtraherar den första ekvationen från den andra så erhålls  $x_1 + x_2 = 0$ .

De enda lösningarna till detta är  $\mathbf{x} = (1, -1)^\top$  och  $\mathbf{x} = (-1, 1)^\top$ .

Dessa båda punkter uppfyller också  $g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = 0$ .

Det återstår att undersöka om någon av dessa båda punkter är en KKT-punkt.

Antag först att  $\mathbf{x} = (1, -1)^\top$ .

Då övergår KKT-1 till  $8 + 4y_2 = 0$  och  $-6 - 4y_1 = 0$ , dvs  $y_1 = -1.5$  och  $y_2 = -2$ .

Men detta strider mot KKT-3, så  $\mathbf{x} = (1, -1)^\top$  är inte en optimal lösning till problemet.

Antag nu att  $\mathbf{x} = (-1, 1)^\top$ .

Då övergår KKT-1 till  $8 - 4y_1 = 0$  och  $-6 + 4y_2 = 0$ , dvs  $y_1 = 2 \geq 0$  och  $y_2 = 1.5 \geq 0$ .

$\mathbf{x} = (-1, 1)^\top$  och  $\mathbf{y} = (2, 1.5)^\top$  uppfyller därmed samtliga KKT-villkor och således är  $\mathbf{x} = (-1, 1)^\top$  en optimal lösning till problemet.