KTH Matematik

Tentamen i SF1861 och 5B1762 Optimeringslära för T.
Torsdag 22 maj 2008 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

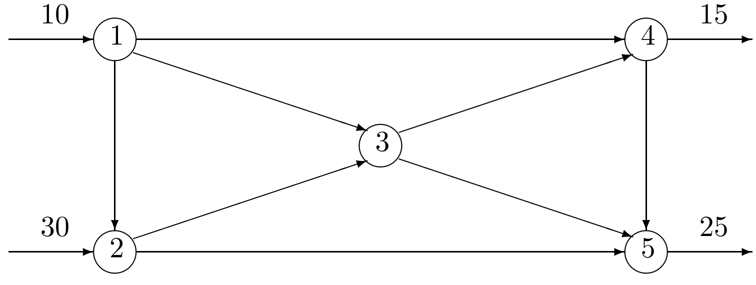
---

1. (a) Bestäm grafiskt, i en noggrann figur, en optimal lösning till följande problem:

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{då} & 4x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 8. \end{array}$$

Antag sedan att den linjära målfunktionen $3x_1+2x_2$ byts ut mot den kvadratiska målfunktionen $(x_1-3)^2+(x_2-1)^2$, medan bivillkoren är desamma som ovan. Bestäm optimal lösning även till detta problem (t ex grafiskt). . . . . (5p)

(b) I nedanstående nätverk är noderna 1 och 2 källnoder, med tillgångar 10 respektive 30 enheter. Noderna 4 och 5 är sänknoder, med efterfrågan 15 respektive 25 enheter, medan nod 3 är en mellannod. Kostnaderna per flödesenhet i bågarna ges av $c_{12}=2$, $c_{13}=2$, $c_{14}=2$, $c_{23}=1$, $c_{25}=3$, $c_{34}=1$, $c_{35}=1$, $c_{45}=2$.



Minkostnadsflödesproblemet svarande mot dessa förutsättningar kan formuleras som ett LP-problem på formen: minimera $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$.
Ange i detalj hur $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ ser ut i detta fall, samt hur variabelvektorn $\mathbf{x}$ är definierad och vad dess komponenter står för.
Du behöver dock *inte* räkna ut optimal lösning till problemet. . . . . (4p)

2. (a) Betrakta följande LP-problem på standardform:

$$\begin{array}{lrl} \text{P1:} & \text{minimera} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ & \text{då} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ & & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ & & x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

Visa att $(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = (1.5,\, 0.5,\, 0,\, 0)$ är en optimal lösning till P1. . . (4p)

(b) Antag nu att vi ändrar likhetsbivillkoren i P1 till olikhetsbivillkor av typen $\geq$, så att följande LP-problem erhålls:

$$\begin{array}{lrl} \text{P2:} & \text{minimera} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ & \text{då} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 1, \\ & & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \geq 2, \\ & & x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

Bestäm, med simplexmetoden, en optimal lösning till detta LP-problem P2. Det är tillåtet att utgå från resultatet i (a)-uppgiften ovan. . . . . (4p)

3. I denna uppgift är

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2 - 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 3x_4.$$

(a) Avgör om $\bar{\mathbf{x}} = (2,\, 1,\, 1,\, 1)^\mathsf{T}$ är en global minpunkt eller ej till $f(\mathbf{x})$. . . . . . . (4p)

(b) Avgör om det finns en globalt optimal lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till problemet att minimera $f(\mathbf{x})$ under bivillkoret att $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1$. Bestäm i såfall $\hat{\mathbf{x}}$. . . . . (4p)

4. (a) Starta i punkten $\mathbf{x}^{(1)} = (1,1)^\mathsf{T}$ och utför en iteration med Newtons metod för att minimera funktionen $f(\mathbf{x}) = \dfrac{16}{(\,|x_1|+1\,)(\,|x_2|+1\,)} + 5x_1 + 5x_2$ utan några bivillkor. . . . . (5p)

Ledning: I omgivningen av $\mathbf{x}^{(1)}$ är $f(\mathbf{x}) = \dfrac{16}{(\,x_1+1\,)(\,x_2+1\,)} + 5x_1 + 5x_2.$

(b) Avgör om f är en konvex funktion på hela $I\!R^2$. . . . . (2p)

5. Betrakta följande optimeringsproblem med olikhetsbivillkor:

$$\begin{array}{ll} \text{minimera} & (x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-4)^2+(x_4-3)^2 \\ \text{då} & x_1+x_2+x_4 \le 0 \\ & x_1+x_3+x_4 \le 0 \\ & x_2+x_3+x_4 \le 0 \end{array}$$

(a) Avgör om punkten $\mathbf{x} = (0,\,0,\,0,\,0)^T$ uppfyller Karush-Kuhn-Tuckervillkoren (KKT-villkoren) för problemet. .... (3p)

(b) Avgör om punkten $\mathbf{x} = (-0.6,\,-0.6,\,0.8,\,-0.2)^T$ uppfyller KKT-villkoren för problemet. .... (3p)

(c) Bestäm en *globalt optimal* lösning till problemet. Motivera svaret! .... (1p)

(d) Är den globalt optimala lösningen du angett ovan *unik*, eller kan det finnas även andra globalt optimala lösningar? Motivera svaret ordentligt! ...... (1p)

6. Vi påminner om att $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ betecknar *nollrummet* respektive *bildrummet* (även kallat *kolonnrummet*) till matrisen $\mathbf{A}$.

I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$,

där b_1, b_2, b_3, c_1 och c_2 givna tal.

(a) Bestäm den punkt bland alla punkter i $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ som har kortast avstånd till den givna punkten $\mathbf{b}$. Svaret får innehålla b_1, b_2 och b_3. .... (3p)

(b) Bestäm den punkt bland alla punkter i $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ som har kortast avstånd till den givna punkten $\mathbf{b}$. Svaret får innehålla b_1, b_2 och b_3. .... (3p)

(c) Bestäm den punkt bland alla punkter i $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ som har kortast avstånd till den givna punkten $\mathbf{c}$. Svaret får innehålla c_1 och c_2. .... (2p)

(d) Bestäm den punkt bland alla punkter i $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ som har kortast avstånd till den givna punkten $\mathbf{c}$. Svaret får innehålla c_1 och c_2. .... (2p)

Lycka till!