

Hur hittar vi $R(A^T)$ och $N(A^T)$?

Transponera A och gör samma sak.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Gauss - Jordan

$$r_2 \leftarrow r_2 - r_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$r_3 \leftarrow r_2 - r_3$$

$$r_4 \leftarrow r_4 - r_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 \end{bmatrix}$$

$$r_5 \leftarrow r_4 - r_5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \textcircled{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_2 \leftarrow r_2 + r_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \textcircled{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_1 \leftarrow r_1 + r_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$$

$$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \gamma_1$$

$$\text{rang}(T) = 3 = \text{rang}(A^T)$$

Notera

• $\dim(R(A)) = \dim(R(A^T))$
vilket alltid gäller! ▽

Bas till $R(A^T)$ ges av $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$N(A^T)$

• $\dim(R(A^T)) + \dim(N(A^T)) = m = 4 \Rightarrow \dim(N(A)) = 4 - 3 = 1$

• $T = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}$ där $U = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{U_\beta} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{U_\gamma}$

$x_\beta = -U_\gamma x_\gamma$ och låt $x_\gamma^1 = e_1 = 1$

$$x_\beta^1 = - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• ger $x^1 = \begin{pmatrix} x_{\beta_1} \\ x_{\beta_2} \\ x_{\beta_3} \\ x_{\gamma_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildar bas till $N(A^T)$.

Kontroll Låt $z = x^1$

$$A^T z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ok.}$$