Fundamentala underrum

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Bestäm baser till de fyra fundamentala underrummen $R(A)$, $N(A)$, $R(A^T)$, $N(A^T)$.

$R(A)$ = Bildrummet till A

$$R(A) = \{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^n \}$$

Om $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

så $Ax = \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_2 \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_n \end{bmatrix} x_n$

$\Rightarrow$ En bas till $R(A)$ ges av alla linjärt oberoende kolonner till A.

ex) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a_1} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a_2} x_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{5a_1 + 3a_2} x_3$$

Använd Gauss-Jordans metod

- Gausselimination på A

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 + (-1) r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r_1 \leftarrow r_1 - r_2 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2 r_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \beta_1 \;\; \beta_2 \;\; \gamma_1 \;\; \gamma_2 \end{array} = T$$

A är överförd till trappstegsform T.

- En bas till R(A) fås genom att välja de kolumner A som svarar mot trappstegsettor i T.

(β_1, β_2) ger att

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{utgör bas till } R(A).$$

$N(A)$ = Nollrummet till A

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

Betrakta återigen trappstegsformen T.

T kan skrivas

$$T = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} U_\beta & \quad U_\gamma \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \end{array}$$

nollraderna

Obs: $N(A) = N(U)$.

dvs. om $x \in N(A)$ så gäller även

$$\begin{cases} Ux = U_\beta x_\beta + U_\gamma x_\gamma = 0 \\ U_\beta = I \text{ ger } \boxed{x_\beta = -U_\gamma x_\gamma} \quad (*) \end{cases}$$

Vill välja linjärt oberoende vektorer x_γ.

Fixera $x_\gamma = e_j$, här $j \in \{1, 2\}$

där e_j är enhetsvektorn j av samma längd som x_γ.

$$x_\beta^1 = -U_\gamma e_1 = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_\beta^2 = -U_\gamma e_2 = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_\beta^1 \\ x_\gamma^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x_\beta^2 \\ x_\gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är bas till $N(A)$.

Kontrollera att $Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1+2 \\ -1-2+3 \\ -1-3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ok.}$$

$$\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ok.}$$

Hitta nu baser till $R(A^T)$, $N(A^T)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Nu ska vi göra procedur igen, fast med $\underline{\underline{A^T}}$!

- Gausselimination på A^T

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 3r_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 \leftarrow r_1 - r_2 \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_2 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & U_\beta & U_\gamma \\ \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right. & & \left.\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right] \\ \left[\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right. & & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma_1 \end{array} = T$$

En bas till $R(A^T)$ ges av kolumnerna i A^T som svarar (β_1, β_2):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ utgör en bas till } R(A^T)$$

En bas till $N(A^T)$ ges av att lösa

$$x_\beta = -U_\gamma x_\gamma \quad \text{för fixerat } x_\gamma = e_j \quad j \in \{1\}$$

$$x_\beta^1 = -\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ger $\begin{pmatrix} x_\beta^1 \\ x_\gamma^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ som den enda basvektorn till $N(A^T)$.

Kontrollera: $A^T x = 0$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2+1 \\ 1-4+3 \\ 2-6+4 \\ 3-10+7 \end{pmatrix} = 0$