Några räkneexempel på LDL^T-faktorisering

1. LDL^T-faktorisera matrisen
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Om det visar sig att matrisen är indefinit kan faktoriseringen avbrytas, i annat fall skall den användas för att lösa följande ekvationssystem
$$\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}, \text{ där } \quad -\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. LDL^T-faktorisera matrisen
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Om det visar sig att matrisen är indefinit kan faktoriseringen avbrytas, i annat fall skall den användas för att lösa följande ekvationssystem
$$\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}, \text{ där } \quad -\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. LDL^T-faktorisera matrisen
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$
Om det visar sig att matrisen är indefinit kan faktoriseringen avbrytas, i annat fall skall den användas för att lösa följande ekvationssystem
$$\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}, \text{ där } \quad -\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Lösningar till räkneexemplen

1. Vi ska LDL^T-faktorisera $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   Det innebär att vi vill hitta en vänstertriangulär matris $\mathbf{L}$ vars diagonalelement är lika med ett och en diagonalmatris matris $\mathbf{D}$.

   För att åstadkomma detta multiplicerar vi $\mathbf{H}$ med matriser från vänster och höger vilka åstadkommer att matrisprodukten blir "mer och mer" diagonal.

   Till att börja med ser vi att för att bli av med alla element utom det första i första raden och första kolumnen i $\mathbf{H}$ ska vi addera $\frac{1}{2}$ gånger rad 1 till rad 2 samt addera $-\frac{1}{2}$ gånger rad 1 till rad 3. Detsamma skall göras för kolumnerna, det vill säga $\frac{1}{2}$ gånger kolumn 1 ska adderas till kolumn 2 och $-\frac{1}{2}$ gånger kolumn 1 ska adderas till kolumn 3. Detta är ekvivalent med att multiplicera $\mathbf{H}$ från vänster med

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   och från höger med

$$\mathbf{E}_1^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   vilket ger

$$\mathbf{E}_1\mathbf{H}\mathbf{E}_1^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

   För att "isolera" elementet i andra raden andra kolumnen skall $\frac{1}{3}$ gånger rad 2 läggas till rad 3. På samma sätt skall $\frac{1}{3}$ gånger kolumn 2 läggas till kolumn 3. Detta svarar mot

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_2^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{H}\mathbf{E}_1^\mathsf{T}\mathbf{E}_2^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

   Detta innebär att LDL^T-faktoriseringen är klar och vi får att

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Eftersom alla diagonalelement i $\mathbf{D}$ är strikt större än noll, det vill säga $d_i > 0,\ i = 1, 2, 3$, följer att $\mathbf{H}$ är positivt definit.

Nu ska vi lösa ekvationssystemet

$$\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}.$$

Eftersom vi har gjort en LDL^T-faktorisering kan vi nu lösa detta ekvationssystem genom att lösa tre enklare ekvationssystem. Låt $\mathbf{z} = \mathbf{L}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ och $\mathbf{y} = \mathbf{Dz}$. Då följer att

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{LDL}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{LDz} = \mathbf{Ly} = -\mathbf{c}.$$

Börja med att lösa det triangulära systemet $\mathbf{Ly} = -\mathbf{c}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 &= & 2 \\ y_2 &= & 1 + \frac{1}{2}y_1 = 2 \\ y_3 &= & 3 - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{3}y_2 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Lös sedan $\mathbf{Dz} = \mathbf{y}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8/3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1 = \frac{2}{2} = 1 \\ z_2 = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} \\ z_3 = \frac{8/3}{4/3} = 2 \end{cases}$$

Lös nu slutligen $\mathbf{L}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{z}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_3 &= & 2 \\ x_2 &= & \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_3 = 2 \\ x_1 &= & 1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \end{cases}$$

vilket ger att den unika lösningen till ekvationssystemet $\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}$ är

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Vi ska LDL$^\mathsf{T}$-faktorisera $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Det innebär att vi vill hitta en vänstertriangulär matris $\mathbf{L}$ vars diagonalelement är lika med ett och en diagonalmatris matris $\mathbf{D}$.

För att åstadkomma detta multiplicerar vi $\mathbf{H}$ med matriser från vänster och höger vilka åstadkommer att matrisprodukten blir "mer och mer" diagonal.

För att få nollor under och till höger om det första diagonalelementet i $\mathbf{H}$ adderar vi $\frac{1}{2}$ gånger rad 1 till rad 2 samt subtraherar $\frac{1}{2}$ gånger rad 1 från rad 3. Detsamma görs för kolumnerna 1 och 3. Detta svarar mot följande matrismultiplikation

$$\mathbf{E}_1\mathbf{H}\mathbf{E}_1^\mathsf{T},$$

där

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

vilket ger följande matris

$$\mathbf{E}_1\mathbf{H}\mathbf{E}_1^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

För att få nollor under andra diagonalelementet i $\mathbf{E}_1\mathbf{H}\mathbf{E}_1^\mathsf{T}$ skall vi dra bort rad 2 från rad 3 samt dra bort kolumn 2 från kolumn 3. Detta ger

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{H}\mathbf{E}_1^\mathsf{T}\mathbf{E}_2^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket innebär att $\mathbf{H}$ kan LDL$^\mathsf{T}$-faktoriseras som

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notera att $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit men <u>inte</u> positivt definit eftersom $d_3 = 0$. Detta innebär att ekvationssystemet kan sakna lösning, detta inträffar om $\mathbf{c} \notin \mathcal{R}(\mathbf{H})$, det vill säga då $\mathbf{c}$ inte ligger i bildrummet till $\mathbf{H}$. Vidare gäller att om $\mathbf{c} \in \mathcal{R}(\mathbf{H})$ så har ekvationssystemet $\mathbf{H}\mathbf{x} = -\mathbf{c}$ oändligt många lösningar.

Vi skall nu försöka lösa systemet $\mathbf{H}\mathbf{x} = -\mathbf{c}$. Eftersom vi har gjort en LDL$^\mathsf{T}$-faktorisering kan vi (om det finns en lösning) nu lösa detta ekvationssystem genom att lösa tre enklare ekvationssystem. Låt $\mathbf{z} = \mathbf{L}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ och $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{z}$. Då följer att

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{z} = \mathbf{L}\mathbf{y} = -\mathbf{c}.$$

Börja med att lösa det triangulära systemet $\mathbf{Ly} = -\mathbf{c}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 &= & 2 \\ y_2 &= & 2 + \frac{1}{2} y_1 = 3 \\ y_3 &= & 4 - \frac{1}{2} y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

Lös sedan $\mathbf{Dz} = \mathbf{y}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{2}{2} = 1 \\ z_2 = \dfrac{3}{3/2} = 2 \\ z_3 = t, \text{ där } t \text{ är godtyckligt} \end{cases}$$

Lös nu slutligen $\mathbf{L}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{z}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_3 &= & t \\ x_2 &= & 2 - x_3 = 2 - t \\ x_1 &= & 1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 = 2 - t \end{cases}$$

Detta innebär att alla lösningar till $\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}$ kan skrivas på formen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där t är godtycklig.

3. Vi ska LDL$^\mathsf{T}$-faktorisera $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$.

För att få nollor under och till höger om första diagonalelementet i $\mathbf{H}$ adderas -2 gånger rad 1 till rad 2 och -1 gånger rad 1 till rad 3. Motsvarande görs för kolumnerna. Detta svarar mot följande matrismultiplikation

$$\mathbf{E}_1\mathbf{H}\mathbf{E}_1^\mathsf{T},$$

där

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ vilken ger följande matris } \mathbf{E}_1\mathbf{H}\mathbf{E}_1^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Eftersom diagonalelement nr 2 i $\mathbf{E}_1\mathbf{H}\mathbf{E}_1^\mathsf{T}$ är negativt så följer att $\mathbf{H}$ ej är positivt semidefinit (och därmed inte heller positivt definit förstås). Vi avbryter därför faktoriseringen här.