Simplexmetoden

- Standard form
- Tillåten baslösning

simplex iteration

1| Sammanställ informationen

2| y

3| r_q , stopp?

4| vilken variabel lämnar basen?

5| uppdatera x

Uppgift 1

Lös (LP)

$$
\begin{aligned}
&\text{maximera} && -8x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \\
&\text{då} && 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\
& && 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 1 \\
& && x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

med simplexmetoden. Börja i punkten $x = (1, 1, 0, 0)^T$.

Uppgift 2

Lös (LP)

$$
\begin{aligned}
&\text{minimera} && 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\
&\text{då} && 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 10 \\
& && -2x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -4 \\
& && x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

med simplexmetoden. Inled med att först lösa Fas-I för att hitta en tillåten baslösning att utgå ifrån.

Lösning: uppgift 1

- Standard form $\left(\text{maximera } f(x) = -\text{ minimera } -f(x)\right)$

$$
-\boxed{\begin{aligned}
\text{minimera } & 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{då } & 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 1 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0
\end{aligned}}
$$

Lös

$$
\begin{aligned}
(LP) \quad \text{minimera } & c^T x \\
\text{då } & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\qquad (\text{Standard form})
$$

$$
c = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Börja i punkten $x = (1\ 1\ 0\ 0\ 0)^T$.

- Tillåten baslösning

$x_\beta = (x_1\ \ x_2)^T$ enligt förslagen punkt.

Kontrollera att detta x_β är ok.

$$
Ax = A_\beta x_\beta + A_\varepsilon \underbrace{x_\varepsilon}_{=0} = b
$$

$$
A_\beta x_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x_\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = b,
$$

$$
2x_{\beta 2} - (-x_{\beta 2}) = 4 - 1 \quad \text{ger} \quad x_{\beta 2} = 1
$$

så $x_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dvs $x_\beta \geq 0$ och vi har en tillåten baslösning.

Iteration 1

1| $x_\beta = (x_1 \quad x_2)^T$ $\qquad$ $x_\delta = (x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_\delta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_\beta = (8 \quad 2)^T \qquad c_\delta = (1 \quad 1 \quad 0)^T$$

$$x_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2| $A_\beta^T y = c_\beta$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (3y_2 = 6 \text{ så}) \; y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3| $r_\delta = c_\delta - A_\delta^T y$

$$r_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$r_{\delta_1} < 0$, så låt $x_{\delta_1} = x_3$ gå in i basen.

4| Vilken variabel lämnar basen, då $x_{\delta_1} = x_3$ går in?

$$A_\beta \bar{a} = a_{\delta_1} = a_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{a} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x_\beta} = x_\beta - \bar{a} x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/6 \\ -4/3 \end{pmatrix} x_3 \geq 0 \quad \text{ger} \begin{cases} x_3 \leq 6/5 \\ (1 + \frac{4}{3} x_3 \geq 0 \text{ ok}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x_{\beta_1} = x_1$ lämnar basen och $x_3 = 6/5$.

5| $\overline{x_\beta} = x_\beta - \bar{a} x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/6 \\ -4/3 \end{pmatrix} \frac{6}{5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Iteration 2

1] $x_\beta = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ $\qquad$ $x_\delta = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T$

$A_\beta = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_\delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$c_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$ $\qquad$ $c_\delta = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$

$x_\beta = \begin{pmatrix} 13/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$

2] $A_\beta^T y = c_\beta$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

3] $r_\delta = c_\delta - A_\delta^T y$

$$r_\delta = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 22 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/5 \\ -2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$r_{\delta_2} < 0$, så låt $x_{\delta_2} = x_4$ gå in i basen.

4] Vilken variabel lämnar basen?

$$A_\beta \bar{a} = a_{\delta_2} = a_4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_\beta = x_\beta - \bar{a} x_4 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \geq 0 \quad \begin{cases} x_4 \leq 13/3 \\ x_4 \leq 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_{\beta_1} = x_2$ lämnar basen, och $x_4 = 13/3$.

5] $$\bar{x}_\beta = x_\beta - \bar{a} x_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{13}{3} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} =$$

Iteration 3

$x_\beta = (x_3 \quad x_4)^T$ $\qquad$ $x_\delta = (x_1 \quad x_2 \quad x_5)^T$

$A_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_\delta = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$c_\beta = (1 \quad 1)^T$ $\qquad$ $c_\delta = (8 \quad 2 \quad 0)^T$

$x_\beta = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 13/3 \end{pmatrix}$

2] $A_\beta^T y = c_\beta$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

3] $r_\delta = c_\delta - A_\delta^T y$

$$r_\delta = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$r_\delta > 0 \Rightarrow$ unikt optimum i punkten

$$x^* = \left(0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{13}{3} \quad 0\right)^T.$$

Målfunktionsvärdet för LP problemet vi löst är

$$c^T x^* = 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{13}{3} = \frac{14}{3}$$

men notera att målfunktionsvärdet för problemet vi hade i uppgift att lösa är

$$-c^T x^* = -\frac{14}{3}$$

(alternativt kan vi sätta in x^* i det LP-problemets målfunktion - vilket ger oss samma svar, dvs. $-\frac{14}{3}$)

Lösning: Uppgift 2

- standard form

$$(LP) \quad \text{minimera} \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3$$
$$\text{då} \quad 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 10$$
$$-2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = -4$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

- Tillåten baslösning

Lös Fas-I problemet hörande till (LP) för att hitta en tillåten baslösning att utgå ifrån när vi sedan börjar lösa (LP) med Simplexmetoden.

När vi löser Fas-I vill vi att (LP) ska vara på standard form och att $b \geq 0$. Multiplicera därför med (-1) på bivillkoren som har negativt "b-värde". Detta ger oss det ekvivalenta LP problemet:

$$(LP) \quad \text{minimera} \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3$$
$$\text{då} \quad 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 10$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 4$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1, .., 5$$

Att lösa Fas-I innebär att vi löser ett snarlikt optimeringsproblem till (LP), som i optimum ger oss en tillåten baslösning till (LP) om målfunktionsvärdet är lika med noll. Om målfunktionsvärdet i optimum till Fas-I problemet är större än noll så saknas tillåten baslösning till vårat ursprungliga (LP), dvs. att (LP) inte har någon tillåten punkt.

Inför en artificiell variabel $v_j \geq 0$ för varje likhetsbivillkor i (LP), och lös

$$(\text{Fas-I}) \quad \begin{array}{ll} \text{minimera} & v_1 + v_2 \\ \text{då} & 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + v_1 = 10 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + v_2 = 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i=1,\dots,5, \qquad v_j \geq 0, \quad j=1,2 \end{array}$$

- Här kan vi använda dem artificiella variablerna som tillåten baslösning när vi startar !

- Eftersom Fas-I är på standard form, kan vi lösa Fas-I med simplexmetoden.

$$(\text{Fas-I}) \quad \begin{array}{ll} \text{minimera} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

där

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

med $x_\beta = (v_1 \ \ v_2)^T$ initialt.

$A_\beta x_\beta = b$ ger

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_\beta = b$ så $x_\beta = b = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Att vi sätt till att $b \geq 0 \Rightarrow x_\beta \geq 0$,
och vi kan börja iterera med Simplexmetoden, eftersom vi har problemet på standard form med en tillåten baslösning.

Fas-I Iteration 1

1] $x_\beta = (v_1 \quad v_2)^T$ $\qquad x_\delta = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_\delta = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_\beta^T = (1 \quad 1) \qquad c_\delta^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$x_\beta = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2] $A_\beta^T y = c_\beta \Rightarrow y = c_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3] $r_\delta = c_\delta - A_\delta^T y$

$$r_\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$r_{\delta_1} < 0$, så låt $x_{\delta_1} = x_1$ gå in i basen.

4] Vem lämnar basen?

$A_\beta \bar{a} = a_{\delta_1} = a_1 \Rightarrow \bar{a} = a_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overline{x_\beta} = x_\beta - \bar{a} x_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 \geq 0$ ger $\begin{cases} x_1 \leq 10/6 = 5/3 \\ x_1 \leq 4/2 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_{\beta_1} = v_1$ lämnar basen, och $x_1 = 5/3$.

5] $\overline{x_\beta} = x_\beta - \bar{a} x_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{5}{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Fas - I Iteration 2

1) $x_\beta = (x_1 \quad v_2)^T$. $x_\delta = (x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad v_1)^T$

$A_\beta = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A_\delta = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$c_\beta^T = (0 \quad 1)$ $c_\delta^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$

$x_\beta = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ (kontrollera $A_\beta x_\beta = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = b$ ok)

2) $A_\beta^T y = c_\beta$

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $r_\delta = c_\delta - A_\delta^T y$

$$r_\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$r_{\delta_1} < 0$, så låt $x_{\delta_1} = x_2$ gå in i basen.

4) $A_\beta \bar{a} = a_{\delta_1} = a_2$

$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{a} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$\overline{x_\beta} = x_\beta - \bar{a}\, x_2 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} x_2 \geq 0$ ger $\begin{cases} x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_{\beta_2} = v_2$ lämnar basen, och $x_2 = 2$.

5) $\overline{x_\beta} = x_\beta - \bar{a}\, x_2 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Härmed är artificiella variablerna ute ur basen. Återgå nu till det ursprungliga (LP) problemet vi ville lösa med den erhållna basen från Fas-I lösningen, dvs

$x_\beta = (x_1 \quad x_2)^T$ och $x_\delta = (x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T$

Simplexmetoden på (LP), Iteration 1

1| $x_\beta = (x_1 \quad x_2)^T$ $\qquad$ $x_\delta = (x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T$

$A_\beta = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_\delta = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$c_\beta^T = (2 \quad 1)$ $\qquad$ $c_\delta^T = (3 \quad 0 \quad 0)$

$x_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (från Fas-I), $\left(\text{Kontroll: } A_\beta x_\beta = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = b \text{ ok}\right)$

2| $A_\beta^T y = c_\beta$

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3| $r_\delta = c_\delta - A_\delta^T y$

$r_\delta = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$r_\delta \geq 0 \Rightarrow$ optimala! med $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $c^T x^* = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4.$

Men vilken punkt hittar vi, om vi låter $x_{\delta_2} = x_4$ gå in i basen? (bonus uppgift!)

4| $A_\beta \bar{a} = a_{\delta_2} = a_4$

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{a} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\bar{x}_\beta = x_\beta - \bar{a} x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \geq 0$ ger $\begin{cases} (1 + \frac{1}{2} x_4 \geq 0 \text{ ok}) \\ x_4 \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_{\beta_2} = x_2$ lämnar basen, och $x_4 = 2.$

5| $\bar{x}_\beta = x_\beta - \bar{a} x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Iteration 2

1| $x_\beta^T = (x_1 \quad x_4)$ $\qquad$ $x_\delta^T = (x_2 \quad x_3 \quad x_5)$

$A_\beta = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_\delta = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$c_\beta^T = (2 \quad 0)$ $\qquad$ $c_\delta^T = (1 \quad 3 \quad 0)$

$x_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, kontroll $A_\beta x_\beta = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = b$ ok.

2| $A_\beta^T y = c_\beta$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3| $r_\delta = c_\delta - A_\delta^T y$

$$r_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$r_\delta \geq 0 \Rightarrow$ fortsatt optimala, nu med $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

och målfunktionsvärdet $c^T x^* = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 4$
är oförändrat.

Man kan visa att alla punkter $x_\alpha = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $\alpha \in (0,1)$

är tillåtna och ger samma målfunktionsvärde.

Så alla punkter på linjen mellan de två punkterna vi hittat är optimala!