

Kvadratisk optimering för analys av ett fackverk, av Krister Svanberg

Här ges ett exempel på ett kvadratisk optimeringsproblem som naturen löser, till synes utan några större svårigheter.

Givet är en 3-dimensionell fackverksstruktur bestående av 5 st noder och 4 st stänger.

De fem nodernas koordinater (i x-, y- och z-led) ges i tur och ordning av:

$(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$.

De fyra stängerna har samtliga längden $\sqrt{2}$ och de förbinder noderna enligt följande:

Stång 1 går mellan noderna 1 och 5, stång 2 går mellan noderna 2 och 5,

stång 3 går mellan noderna 3 och 5, och stång 4 går mellan noderna 4 och 5.

Noderna 1–4 är samtliga “fixerade” (fastskruvade i berg) så att de inte kan röra sig, medan nod 5 är “fri”.

I nod 5 (den fria noden) appliceras nu en given yttre kraft $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^\top$.

Detta förorsakar normalkrafter f_1 , f_2 , f_3 och f_4 i de fyra stängerna,

där $f_j > 0$ betyder dragkraft medan $f_j < 0$ betyder tryckkraft.

Uppgiften går ut på att bestämma dessa normalkrafter.

Vi får följande tre villkor för kraftjämvikt i den enda icke-fixerade noden (dvs nod 5):

$$p_x - f_1/\sqrt{2} + f_3/\sqrt{2} = 0, \quad (\text{kraftjämvikt i x-led})$$

$$p_y - f_2/\sqrt{2} + f_4/\sqrt{2} = 0, \quad (\text{kraftjämvikt i y-led})$$

$$p_z - f_1/\sqrt{2} - f_2/\sqrt{2} - f_3/\sqrt{2} - f_4/\sqrt{2} = 0, \quad (\text{kraftjämvikt i z-led}).$$

Detta kan skrivas på formen $\mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{p}$,

$$\text{där } \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^\top \text{ och } \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^\top.$$

Men detta ekvationssystem har oändligt många lösningar, så det räcker inte för att bestämma $\mathbf{f}$ entydigt. Vi måste också antaga att materialet i stängerna är linjärt elastiskt, så att det sker en (liten) deformation av strukturen då kraften $\mathbf{p}$ appliceras.

Antag därför att den fria noden förflyttas från $(0, 0, 1)$ till $(0, 0, 1) + (u_x, u_y, u_z)$,

där vektorn $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^\top$ kallas *förskjutningsvektorn* svarande mot lastvektorn $\mathbf{p}$.

Om komponenterna i vektorn $\mathbf{u}$ är “små” så ger en geometrisk betraktelse att de fyra stängernas längdändringar (elongations) e_j beror av $\mathbf{u}$ enligt formeln $e_j = \mathbf{r}_j^\top \mathbf{u}$, där

$$\mathbf{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\top \quad (= \text{en normerad riktningsvektor för stång 1}),$$

$$\mathbf{r}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\top \quad (= \text{en normerad riktningsvektor för stång 2}),$$

$$\mathbf{r}_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\top \quad (= \text{en normerad riktningsvektor för stång 3}),$$

$$\mathbf{r}_4 = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\top \quad (= \text{en normerad riktningsvektor för stång 4}).$$

Sambandet mellan stängernas längdändringar och den fria nodens förskjutning kan således skrivas på formen $\mathbf{e} = \mathbf{R}^\top \mathbf{u}$, där $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)^\top$ och där $\mathbf{R}$ är samma matris som ovan!

Vi behöver ytterligare en uppsättning villkor, nämligen sambandet mellan längdändring och normalkraft för varje stång. Detta ges av Hookes lag som säger att $f_j = \frac{A_j E}{L_j} \cdot e_j$, där A_j är tvärsnittsarean, L_j är stånglängden, och E är materialets elasticitetsmodul.

Detta kan skrivas $\mathbf{e} = \mathbf{D} \mathbf{f}$, där $\mathbf{D}$ är en diagonalmatrix med diagonalelementen $d_j = \frac{L_j}{A_j E}$.

Sammanfattningsvis har vi följande samband: $\mathbf{R} \mathbf{f} = \mathbf{p}$, $\mathbf{e} = \mathbf{R}^T \mathbf{u}$ och $\mathbf{e} = \mathbf{D} \mathbf{f}$.

Här kan vektorn $\mathbf{e}$ elimineras, varefter vi får följande ekvationssystem i $\mathbf{f}$ och $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \mathbf{f} - \mathbf{R}^T \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \mathbf{f} &= \mathbf{p} \end{aligned} \quad (0.1)$$

Eftersom matrisen $\mathbf{D}$ är positivt definit så är detta ekvationssystem ekvivalent med följande kvadratiske optimeringsproblem under linjära bivillkor:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{D} \mathbf{f} \\ \text{då} \quad & \mathbf{R} \mathbf{f} = \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (0.2)$$

Bland alla vektorer $\mathbf{f}$ som uppfyller kraftjämviktsvillkoren $\mathbf{R} \mathbf{f} = \mathbf{p}$ så väljer alltså naturen den vektor $\mathbf{f}$ som minimerar den kvadratiske funktionen $\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{D} \mathbf{f}$. Denna målfunktion kan tolkas som totala töjningsarbetet, ty $\mathbf{f}^T \mathbf{D} \mathbf{f} = \sum_j d_j f_j^2 = \sum_j f_j e_j = \sum_j (\text{kraft} \cdot \text{väg})$.

Optimeringsproblemet (0.2) kan lösas på två sätt. Det första sättet består i att lösa (0.1). Ur $\mathbf{D} \mathbf{f} - \mathbf{R}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ erhålls att $\mathbf{f} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{u}$, som insatt i $\mathbf{R} \mathbf{f} = \mathbf{p}$ ger ekvationssystemet

$$\mathbf{R} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{u} = \mathbf{p}. \quad (0.3)$$

Enligt ovan är $L_j = \sqrt{2}$ för alla j . För enkelhets skull antar vi fortsättningsvis att $A_j = 1$ för alla j och att $E = \sqrt{2}$, så att $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ = enhetsmatrisen. Vidare antar vi att $\mathbf{p} = \sqrt{2} \cdot (4, 1, 6)^T$.

$$\text{Då är } \mathbf{R} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ så vi får att } \mathbf{u} = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ varefter } \mathbf{f} = \mathbf{R}^T \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Optimeringsproblemet (0.2) kan också lösas med en nollrumsmetod.

Genom att tillämpa Gauss-Jordans metod på ekvationssystemet $\mathbf{R} \mathbf{f} = \mathbf{p}$, eller enklare på systemet $\sqrt{2} \mathbf{R} \mathbf{f} = \sqrt{2} \mathbf{p}$, så erhålls efter några radoperationer att en tillåten lösning ges av $\bar{\mathbf{f}} = (9, 2, 1, 0)^T$, medan en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{R})$ ges av vektorn $\mathbf{z} = (-1, 1, -1, 1)^T$.

Därefter bestäms skalären v ur ekvationen $\mathbf{z}^T \mathbf{D} \mathbf{z} v = -\mathbf{z}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{f}}$, dvs $4v = 8$, dvs $v = 2$.

$$\text{Slutligen erhålls den optimala lösningen till problemet (0.2) ur } \mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}} + 2 \cdot \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$