HEMUPPGIFT II

1. Instruktioner

I denna hemuppgift är det tillåtet att jobba i grupper om högst tre personer. En rapport per grupp skall lämnas in, i vilken ni skall lösa nedanstående uppgifter. En utskrift av MATLAB-filen och plottar skall vara inkluderade i rapporten.

Skriv namn, personnummer och email-adresser till alla medlemmar i gruppen på framsidan av rapporten.

Rapporten skall lämnas in till läraren på lektionen (08:00–10:00) tisdagen den 5 oktober, 2010. Denna deadline är inte förhandlingsbar.

2. Inledning

Som i Hemuppgift I, ska vi betrakta problemet om spektralskattning.

2.1. **Periodogramskattningen.** Antag att dataföljden

$$y_0, \ldots, y_N$$

är given. I MATLAB kan man skatta spektraltätheten Φ av signalen $y = (y_0, \ldots, y_N)$ med

```
>> Phi = abs(fft(y)).^2;
```

(Man kan säga att spektraltätheten mäter signalens energiinnehåll vid frekvensen θ.) Denna uppskattning kallas för *periodogramskattningen* för signalen y. Det är vanligt att använda deciBel (dB) för att uttrycka spektraltätheten för ljudsignaler. Därför definierar vi

$$\Psi = 10 \log_{10} \Phi.$$

2.2. **En rationell modell.** Nu är uppgiften att anpassa en rationell modell till den skattade spektraltätheten Ψ ovan, det vill säga, vi vill hitta en $\widehat{\Psi}$, sådan att $\widehat{\Psi}$ är nära Ψ, och dessutom,

$$\widehat{\Psi}(\theta) = \frac{S(\theta)}{T(\theta)}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

där

$$\begin{aligned} S(\theta) &= p_0 + p_1 \cos\theta + \cdots + p_n \cos(n\theta), \\ T(\theta) &= 1 + q_1 \cos\theta + \cdots + q_n \cos(n\theta). \end{aligned}$$

Varför vill vi göra det? Målsättningen är att den långa dataföljden y (som har N komponenter), kan ersättas med den korta följden med komponenter $p_0, \ldots, p_n$ och $q_1, \ldots, q_n$, och om $2n + 1 \ll N$, så har vi sparat en hel del plats i minnet. Denna idé används i talbehandling för att karakterisera korta talsegment. Saken är den att om vi jämför två samplingar där en person säger samma ord två gånger, så är dataföljderna i tidsdomänen ganska olika, medan frekvensdomänbilderna är väldigt lika, och en approximation av frekvensdomänbilden är tillräcklig för att reproducera ljudet av ordet. Därför är det vettigt att approximera Ψ. På detta sätt kan den rationella modellen användas för taligenkänning, röstigenkänning, talkompression, och så vidare.

2.3. **Problemet.** Precis som i Hemuppgift I, vill vi minimera normen $\|T(\Psi - \widehat{\Psi})\| = \|T\Psi - S\|$. Men skillnaden mellan den här uppgiften och Hemuppgift I är att vi nu ska använda 2-normen. Och vi vill använda kvadratisk optimering för att lösa problemet.

Till att börja med kommer vi att använda oss av en standardljudsignal som vår signal y i Matlab. Denna ljudsignal kallas för *handel*, och är ett utdrag från när en kör sjunger Händels Messias. För att få periodogramuppskattningen Ψ för detta y, så går vi tillväga på följande sätt:

```
>> load handel;
>> N = 1024;
>> Psi = 10*log10((1/N)*abs(fft(y(10001:10000+N))).^2);
>> Psi = Psi(1:N/2);
```

(Man kan lyssna på det y vi använder genom att använda kommandot `sound(y,Fs)`. Eftersom vår signal y är en reell följd, så räcker det med att ta de första $\frac{N}{2}$ komponenterna av Ψ; detta är anledningen till att det står $N/2$ i det fjärde MATLAB-kommandot ovan.)

Ovanstående kommandosekvens i MATLAB ger oss en vektor med värden $\Psi(\theta_k)$, där

$$\theta_k = \frac{k\pi}{\frac{N}{2}}, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Vi ska använda ℓ^2-normen för följder, d v s om vi har en följd $f = (f_k)_{0 \le k \le \frac{N}{2}-1}$, så är

$$\|f\|_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} |f_k|^2}.$$

Eftersom vi betraktar problemet att minimera normen av $\Psi T - S$, så leds vi till följande optimeringsproblem:

$$(Q): \text{ minimera } \left\| \left(\Psi(\theta_k) \cdot T(\theta_k) - S(\theta_k)\right)_{0 \le k \le \frac{N}{2}-1} \right\|_2 . \tag{1}$$

Variablerna i ovanstående minimeringsproblem är koefficienterna $p_0, \dots, p_n$ och $q_1, \dots, q_n$.

3. Uppgifter

(1) Skriv om optimeringsproblemet (Q) i (1) som ett kvadratiskt optimeringsproblem.

Motivera din formulering, d v s, förklara varför ditt kvadratiska optimeringsproblem löser det ursprungliga optimeringsproblemet (Q). I ditt kvadratiska optimeringsproblem ska du tydligt specificera variablerna, bivillkoren och målfunktionen.

(2) Skriv ett program i MATLAB för att lösa ditt kvadratiska optimeringsproblem. Använd $n = 8$.

(3) Plotta $(\Psi(\theta_k) \cdot T(\theta_k))_{0 \le k \le \frac{N}{2}-1}$ och $(S(\theta_k))_{0 \le k \le \frac{N}{2}-1}$ i samma graf. Vad observerar du?

(4) Nu ska vi lägga till ett bivillkor till vårt problem. Antag att vi vill ha en lösning där

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 0 \text{ and } \sum_{k=1}^{n} q_k = 0.$$

(a) Skriv det nya optimeringsproblemet som ett kvadratiskt optimeringsproblem med bivillkor.
(b) Skriv ett program i MATLAB för att lösa ditt kvadratiska optimeringsproblem med hjälp av Lagrangemetoden.
(c) Plotta $(\Psi(\theta_k) \cdot T(\theta_k))_{0 \le k \le \frac{N}{2}-1}$ och $(S(\theta_k))_{0 \le k \le \frac{N}{2}-1}$ i samma graf.